《离散数学》

12-组合计数基础 (Combinatorial Counting)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

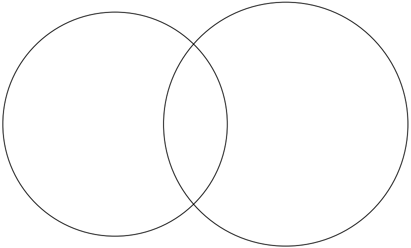
2025 年 12 月 29 日

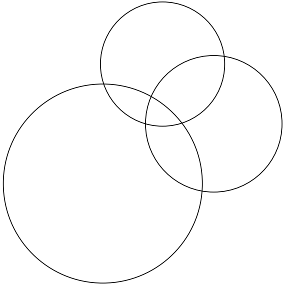
组合问题举例

相互重叠的圆 (I)

假设平面上有 n 个圆，这些圆两两相交于两个不同的顶点，这里我们指的是没有两个圆是相切或者不相交的，并且没有三个圆交于同一点。

问题是，这些圆将平面分成了多少个区域?



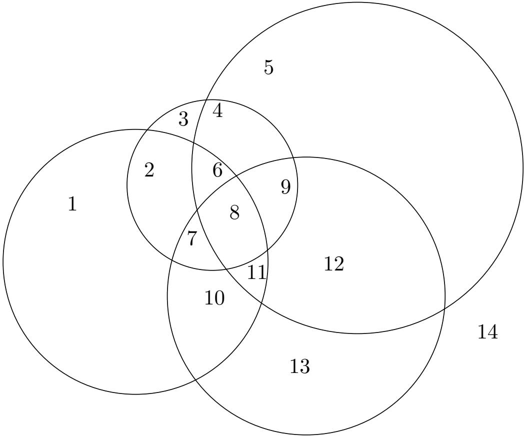


相互重叠的圆 (II)

令 h_n 表示 n 个圆对平面的划分数，不难发现：

- $h_1 = 2,\ h_2 = 4,\ h_3 = 8$

很容易猜测，$h_n = 2^n$。但很遗憾，$n = 4$ 的时候就出现了问题：



相互重叠的圆 (III)

我们用另一种方式来求得 h_n，这是一种常见得方式，即从 h_{n-1} 的基础上去考虑 h_n:

- 假设现在平面上已经有放置好的前 $n-1$ 个圆 $\gamma_1,...,\gamma_{n-1}$，其将平面划分成了 h_{n-1} 个部分。
- 现在我们画上第 n 个圆 γ_n，由假设，γ_n 会和每个 γ_i 有 2 个交点，从而 γ_n 上一共有 $2n-2$ 个交点，即 $2n-2$ 条弧。
- 每条弧都会对应产生一个新的区域，从而我们有:

$$h_n = h_{n-1} + 2n - 2$$

计算上述递推式可得，$h_n = n^2 - n + 2 (n \geqslant 2)$

Nim 游戏

Nim 是一种两个人玩的游戏，玩家双方面对一堆硬币（或者石头或者豆数），假设有 $k \geqslant 1$ 堆硬币，每堆硬币分别有 $n_1, \ldots n_k$。游戏的规则如下：

1. 玩家轮番出场，我们分别记为 I 号玩家和 II 号玩家。
2. 当轮到一个玩家出场时，其可以选择一堆硬币堆，从中拿去至少一枚硬币，当然玩家也可以选择拿走整堆硬币，从而这个硬币堆变成空堆，我们视作其退出游戏。
3. 游戏的目标在于拿走最后一枚硬币，即拿走最后一枚硬币的玩家获得胜利。

问题是，对于给定的一堆硬币，我们如何判断玩家是否有必胜策略？

我们从简单的情况开始讨论起:

$k=1$ 的情况:只有一堆硬币的时候显然是先手必胜,只需要直接拿光就可以了!

$k=2$ 的情况:我们宣称是否存在先手必胜策略只依赖于 $n_1=n_2$。假设 $n_1\neq n_2$,则

1. 玩家 I 首先拿走一些硬币使得剩下的两堆硬币相等。
2. 再剩余的回合数,玩家 I 模仿玩家 II 的取法。

不难验证上述是 $n_1\neq n_2$ 的先手必胜策略,也是 $n_1=n_2$ 情况下的后手必胜策略。

上述例子可以发现，核心策略实际上是要能完成某种模仿的后手获胜场景。那我们现在来推广到一般的情况。为了在任意堆中刻画相等的概念，我们引入对二进制的刻画。假设 $n_1, \ldots n_k$ 都可以表示成 l 位二进制（不足的用 0 表示）:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= (n_{1l} n_{1(l-1)} \ldots n_{11})_2 \\
n_2 &= (n_{2l} n_{2(l-1)} \ldots n_{21})_2 \\
&\cdots \\
n_k &= (n_{kl} n_{k(l-1)} \ldots n_{k1})_2
\end{aligned}
$$

定义 1 **[平衡 Nim 游戏].**

一个 Nim 游戏是平衡的，当且仅当对任意的 $s \in \{1, \ldots, l\}$，$\sum_{j=1}^{k} n_{js}$ 都是偶数。

例 2.

考察一个 4 堆 Nim 游戏，其堆的大小分别为 $7, 9, 12, 15$。注意到：

	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
7	0	1	1	1
9	1	0	0	1
12	1	1	0	0
15	1	1	1	1

该游戏是不平衡的，但是把其中的 7 换成 10，我们就获得了一个平衡的 Nim 游戏。

定理 3.

先手玩家在非平衡 Nim 游戏中有必胜策略，后手玩家在平衡 Nim 游戏中有必胜策略。

证明：我们只需要证明，玩家 I 总有方法使得不平衡的 Nim 游戏变为平衡 Nim 游戏。令 j 为最大不平衡位，随机选择一个第 j 位不为 0 的堆，不妨假设为 n_t，则对应取法如下：

- 先取走一枚硬币。
- 如果对于 $i < j$ 现在是平衡的，则取走 2^i 枚硬币。
- 如果对于 $i < j$ 现在是不平衡的：
  - 若 $n_{ti} = 0$，则不取走硬币。
  - 若 $n_{ti} = 1$，则取走 2^{i+1} 枚硬币。

容易验证，上述取法可以使得游戏变为平衡的 Nim 游戏。

上述我们给出了两个简单的组合问题。第一个问题有关计数，第二个问题则有关奇偶。而在接下来的课程中，我们将进一步对计数进行一些介绍。让我们先回顾一些计数中的重要方法。

加法原理

设集合 S 被划分成两两不相交的部分 $S_1, S_2, S_3, \ldots S_m$。则 S 的对象项目可以通过确定它的每一个部分的对象数目并相加得到：

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m|$$

乘法原理

令 S 是有序对 (a, b) 组成的集合，其中 a 来自大小为 p 的集合，而且对于每个选择 a，b 有 q 种选择。从而 S 的大小满足：

$$|S| = p \times q$$

减法原理

令 A 是一个集合，而 U 是包含 A 的更大集合。令 $\overline{A}$ 是 A 在 U 中的补集，则 A 中元素的数目可以由下列等式给出:

$$|A| = |U| - |\overline{A}|$$

除法原理

令 S 是一个有限集合，把其划分成 k 个部分使得每一部分包含的对像数目相同。则此划分的部分数目 k 可以如下得出:

$$k = \frac{|S|}{\text{在一个部分中的对象数目}}$$

当然容斥原理也是一种非常常用的计数方法:

定理 4 **[容斥原理].**

令 $A_1, \ldots A_n$ 是有限集合，则我们有:

- $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
- $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$.

组合数

组合数的定义

让我们先来回顾一个组合数的定义:

定义 5 **[组合数].**

对于非负整数 n 和 k，我们定义:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{\Pi_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$$

其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$。

一些说明

1. 也常用 C_k^n 表示 $\binom{n}{k}$。
2. 另外一个常见的计算表达式为 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$。
3. 其也被称作二项式系数（Binomial Coefficient）。

组合数实际上表示了一个 n 个元素的集合中大小为 k 的子集个数。

定义 6.

令 X 是任一集合，k 是一个非负整数，定义：

$$\binom{X}{k}$$

为 X 的大小为 k 的子集的集合。

引理 7.

对于任意集合 X，我们有：

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$$

组合数的实际意义 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明：[引理??的证明]

- 在 n 个元素中，选取 k 个有序组一共有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 种情况。
- 对于任何一个大小为 k 的子集，我们可以构建出 $k!$ 个不同的有序组。

从而我们有:

$$k! \cdot \left|\binom{X}{k}\right| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

即:

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{|X|}{k}$$

现在让我们考虑如下方程:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$$

该方程有多少个不同的正整数解?

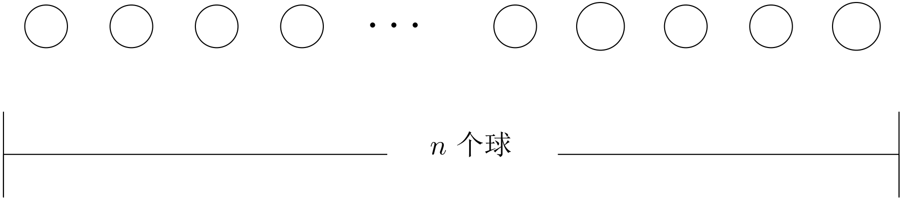
特殊情况

可以看到特殊情况还是好算的:

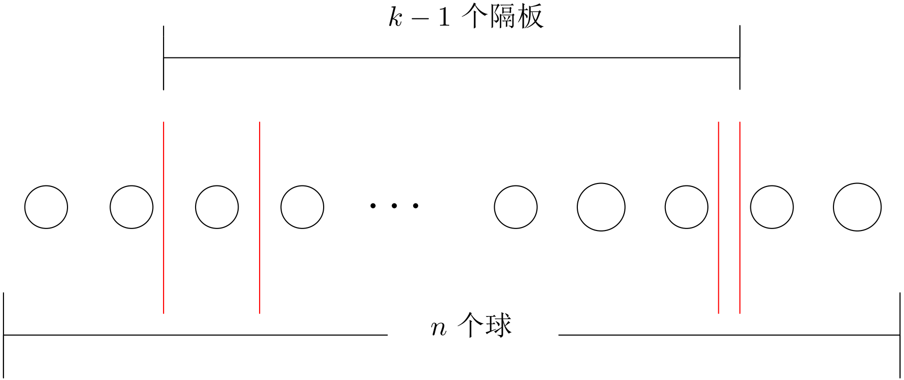
- $k = 2$ 时有 $n - 1$ 个不同的解。
- $n = k + 1$ 时有 n 个不同的解。

求解上述方程的非负整数解个数 (I)

我们将 n 看成排成一排的 n 个球，而 k 则可以看成 $\mathrm{k}-1$ 个隔板：



求解上述方程的非负整数解个数 (II)



- 我们不允许隔板放在同一个位置。
- 这 $k-1$ 个隔板把球分成了 k 个部分，每个部分至少包含一个球。

求解上述方程的非负整数解个数 (III)

可以看到，每一种放置隔板的方案都对应了一个方程的解。而每个放置隔板的方案等价于从这 $n-1$ 个空里挑选一个大小为 $k-1$ 的子集，从而我们有：

$$\text{方程的解个数} = \binom{n-1}{k-1}$$

定理 8.

方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ 的不同正整数解个数为 $\binom{n-1}{k-1}$

推论 9.

方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ 的不同非负整数解个数为 $\binom{n+k-1}{k-1}$

组合数的一些性质 (I)

引理 10.

对于任意的 $n, k \geqslant 0$，我们有：

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

证明：

- 通过定义可以直接获得。当然从组合的意义上也是一样的，因为在 n 个元素的集合里，大小为 k 的子集个数和大小为 $n-k$ 的子集个数是相同的，其形成一个一一对应。
- 我们可以通过计算的方式得到证明：

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Shanghai Normal University 上海师范大学

证明： 我们也可以用组合的方式来证明上述第二个式子：

- 等式左边是 n 个元素取 k 个的取法个数。
- 关于等式右边，让我们来思考这取 k 个的取法：
  - 如果我们选取了第 n 个元素，那么我们还需要从剩下的 $n-1$ 个元素中选取 $k-1$ 个元素，那是 $\binom{n-1}{k-1}$。
  - 如果我们没有选取第 n 个元素，那么我们还需要从剩下的 $n-1$ 个元素中选取 k 个元素，那是 $\binom{n-1}{k}$。

从而我们有：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

利用上面的公式我们不难得到下述杨辉三角形:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

定理 11.

对于任意的非负整数 n，我们有:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

引理 12.

对于任意的 $n, k \geqslant 0$，我们有：

- $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$。
- $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$。
- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$

证明：

- 在 $(1+x)^n$ 中令 $x=1$ 即得。
- 在 $(1+x)^n$ 中令 $x=-1$ 即得。

证明：[证明续] 我们用一种组合的方式来证明最后一个式子。不难发现，等式左边可以变形为：

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

我们现在来证其 $= \binom{2n}{n}$：

- 我们考虑从 $2n$ 个元素中选取 n 个元素的方案数，其是 $\binom{2n}{n}$。
- 我们可以从另一个方面计算这个方案数，将 $2n$ 个元素分成两个大小为 n 的集合，分别记为 A 和 B，则我们可以：
  - 从 A 中选取 i 个元素。
  - 从 B 中选取 $n-i$ 个元素。

  从而我们有 $2n$ 个元素中选取 n 个元素的方案数为：

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

即：$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$。

上海师范大学 Shanghai Normal University

引理 13.

证明下列恒等式:

$$\sum_{i=\max\{0,\lceil\frac{n-k}{2}\rceil\}}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{2i+k}{n}=2^n$$

证明：我们构造一个计数情景。假设有 n 个颜色的球，每种颜色的球恰好有 2 个，此外还有 k 个无色球。我们考虑从这 $2n+k$ 个球中选取 n 个不同颜色球的方案数 (不包括无色球)。

我们可以从两个方面来计算这个方案数:

- 记 S 为所有满足要求的选法集合，显然一共有 2^n 种不同的方案，即 $|S|=2^n$。
- 我们现在使用另一种计数方式。令 A_j 表示不包含第 j 种颜色的 n 个球的选法集合，显然我们有:

$$S=\cap_{j=1}^{n}\overline{A_j}$$

证明： [证明续] 现在来考察 $\cap_{j\in J}A_j$ 的大小，这里 $J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ 是任何一个大小为 $n-i$ 的子集。注意到 $\cap_{j\in J}A_j$ 是这些满足要么球是无色的，要么球的颜色属于 $[n]\setminus J$ 中的情况，即在 $2i+k$ 个球中选取 n 个球的方案数，从而我们有：

$$|\cap_{j\in J}A_j| = \begin{cases} \binom{2i+k}{n} & \text{如果} 2i+k\geqslant n \\ 0 & \text{如果} 2i+k<n \end{cases}$$

从而由容斥原理：

$$\left|\cup_{j=1}^{n}A_j\right| = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\substack{J\subseteq[n]\\|J|=n-i}}(-1)^{n-i+1}|\cap_{j\in J}A_j| = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1}\binom{n}{i}\binom{2i+k}{n}$$

因此我们可以获得：

$$|S| = \binom{2n+k}{n} - \left|\cup_{j=1}^{n}A_j\right| = \sum_{i=\max\{0,\lceil\frac{n-k}{2}\rceil\}}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{2i+k}{n}$$

即完成了我们的证明。

阶乘的估计 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们现在来思考一下 $n!$ 的大小:

- $n! = \Pi_{i=1}^{n} i < \Pi_{i=1}^{n} n = n^n$
- $n! = \Pi_{i=1}^{n} > \Pi_{i=2}^{n} 2 = 2^{n-1}$

由上述讨论我们可以知道:

$$2^{n-1} < n! < n^n$$

但是，$n!$ 究竟是更接近前者，还是更接近后者？我们希望给出一个更为准确的答案。

定理 14.

对于任何大于 1 的整数 n，我们有:

$$n^{\frac{n}{2}} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

证明： 上界是通过均值不等式得到的，只需要注意:

$$i \cdot (n+1-i) \leqslant \left(\frac{i+(n+1-i)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

从而我们可以得到:

$$n! = \Pi_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)} \geqslant n^{\frac{n}{2}}$$

下界的证明只需要注意 $i(n+1-i) \geqslant n$ 即可。这个估计已经比之前的缩小很多了，但似乎还是有很大的鸿沟。

定理 15.

对于任何大于 1 的整数 n，我们有：

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

证明： 这里只给出上界的证明，下界的证明是类似的。我们对 n 进行归纳。

$n=1$ 时左边 =1，右边 =1，不等式成立。

假设对 $\leqslant n-1$ 成立，即有 $(n-1)! \leqslant e(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$；则考虑 n 的时候：

$$n! = (n-1)! \cdot n \leqslant n \cdot e(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = en\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

最后一步利用了 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{-1}$。

上述的估计已经比较精确了，下面我们不证明的给出一个更为精确的估计，即熟知的斯特林公式：

定理 16 **[斯特林公式 (Stirling's formula)].**

给定 $n \geqslant 1$ 为整数，令 $f(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，则我们有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = 1$$

组合数的估计 (I)

现在让我们把目标转向组合数，回顾：

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2\cdot 1} = \Pi_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{k-i}$$

我们立马可以获得一个简单的上下界：

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$$

通过上述对阶乘的估计，我们可以得到一个更紧的界。

定理 17.

对于任何 $n \geqslant 1$ 和 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的整数 n, k，我们有：

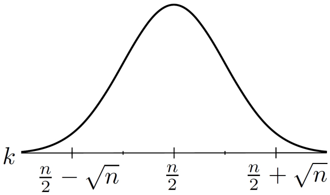
$$\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

通过简单的推导，我们不难得到:

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

这意味着:

- $k \leqslant \frac{n}{2}$ 时，我们有: $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$。
- $k \geqslant \frac{n}{2}$ 时，我们有: $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$。



一个很自然的问题是，$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 的大小是多少?

一个很简单的估计是:

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leqslant 2^n$$

上界运用了所有组合数相加，而下界则是利用了均值原理。

下述定理给出了一个更为精确的估计:

定理 18.

对于任何的整数 $m \geqslant 1$，我们有:

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leqslant \binom{2m}{m} \leqslant \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

证明： [定理18的证明]

定义:

$$P_m = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2m} = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$$

则我们只需要证明:

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leqslant P_m \leqslant \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

- 对于上界来说，只需要注意到:

$$(2m+1)P_m^2 = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right) < 1$$

- 对于下界来说，只需要注意到:

$$\frac{1}{P_m^2} = 2\cdot(2m)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right) < 1$$

生成函数

回顾一个组合数的定义:

定义 19 **[组合数].**

对于非负整数 n 和 k，我们定义:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$$

其中 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times 1$。

我们研究拓展该定义，研究 n 是一般的实数的情况。

定义 20 **[牛顿二项式系数].**

对于任意实数 α 和正整数 k，我们定义:

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!}$$

例 21.

- 当 $\alpha = n$ 为正整数时，我们有：

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- 当 $\alpha = -n$ 为负整数时，我们有：

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(-n - i)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

- 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，我们有：

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(-\frac{1}{2} - i)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$$

我们不加证明的给出牛顿二项式定理:

定理 22.

设 α 是实数，则对于所有满足 $0 \leqslant |x| < |y|$ 的 x 和 y，有:

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{k} y^{\alpha-k}$$

特别的，定理可以等价的表示为对于 $|z| < 1$，有:

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^{k}$$

例 23.

- 令其中的 $\alpha = -n$ 我们可以得到:

$$\frac{1}{(1+z)^n} = (1+z)^{-n} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- 将上面的 z 换成 $-z$ 可得:

$$\frac{1}{(1-z)^n} = (1-z)^{-n} = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- 令 $\alpha = \frac{1}{2}$，我们有:

$$\sqrt{1+z} = (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k$$

生成函数的想法是将一个数列转换成某个函数的系数，其可以是指数函数，也可以是多项式函数。我们这里只介绍多项式函数。

令 $h_0, \ldots h_n, \ldots$ 是一个无穷数列，定义其生成函数为如下的无穷级数：

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \cdots$$

关于有穷数列的生成函数

有穷数列 $h_0, \ldots h_n$ 也可以定义相应的生成函数，只需将该数列看成如下的无穷数列即可：

$$h_0, \ldots h_n, 0, 0, 0, \cdots$$

例 24.

- 每一项都等于 1 的无穷数列 $1, 1, \dots$ 的生成函数为:

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

- 对于有穷数列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ 的生成函数为:

$$g(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

- 对于无穷数列 $\binom{\alpha}{0}, \binom{\alpha}{1}, \dots, \binom{\alpha}{n} \dots$ 的生成函数为:

$$g(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots = (1+x)^\alpha$$

再论 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非负整数解

我们再来回顾一下：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非负整数解。由之前的讨论我们可知该方程一共有 $\binom{k+n-1}{n-1}$ 个不同的整数解。

现在我们用生成函数的角度来理解一下这个推导。

定义无穷数列 h_i 表示 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = i$ 的非负整数解个数。则其生成函数为：

$$g(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_k x^k + \cdots = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1+1}{n-1} x + \cdots + \binom{k+n-1}{n-1} x^k + \cdots = \frac{1}{(1-x)^k}$$

我们再来审视一下这个生成函数：

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \times \cdots \times \frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + \cdots) \times (1 + x + x^2 + \cdots) \times \cdots \times (1 + x + x^2 + \cdots)$$

从而我们可以发现，$g(x)$ 中 x^k 的系数恰好是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非负整数解个数！

Catlan 数

问题 25.

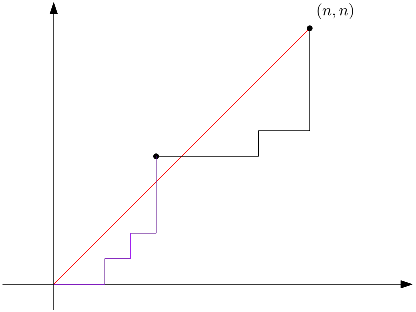
让我们考察这样两个问题:

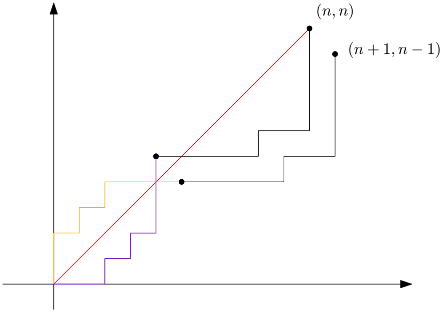
- 假设一个人从平面直角坐标系的原点开始行走，每次只能向右走一格或者向上走一格，则从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 一共有多少种不同的走法?
- 假设一个人从平面直角坐标系的原点开始行走，每次只能向右走一格或者向上走一格，并且要求这个人不能走过 $y=x$ 这条线，即当前坐标的横坐标不能小于当前的纵坐标，则从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 一共有多少种不同的走法?

- 第一个问题不难回答，一共 $\binom{2n}{n}$ 种走法。
- 第二个问题需要仔细思考一下。

我们来考虑那些不满足要求的走法，其一定有第一次超过 $y=x$ 的时刻，记这个点为 $(k,k+1)$

- 将到 $(k,k+1)$ 的路径翻转 (左图紫色部分)，变成了右图的路径 (右图的黄色部分)
- 后面的路径不变。





非负路径个数-第一个解决思路 (II)

通过上述变换，一条跨越 $y = x$ 的 $(0,0)$ 到 (n,n) 的路径转换为了一条 $(0,0)$ 到 $(n-1, n+1)$ 的路径。

- 反过来，任何一条 $(0,0)$ 到 $(n-1, n+1)$ 的路径都可以通过这个方式转换成一条跨越 $y = x$ 的 $(0,0)$ 到 (n,n) 的路径。
- 从而这两个集合形成一个双射。

所以，不跨越 $y = x$ 的路径个数 C_n 为:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

我们对路径进行分段，定义 C_i 是 $(0,0)$ 到 (i,i) 的满足要求的路径数。特别的，我们令 $C_0=1$。这是合理的。

- 显然 C_i 也是任意的从 (k,k) 到 $(k+i,k+i)$ 的满足要求的路径数。
- 考察一个满足要求的路径，考虑这条路径第一次非起点外和 $y=x$ 存在的交点 (k,k)（可能是终点）：
  - 这条路径可以被拆分成如下两部分：$l_1:(0,0)\to(k,k)$，$l_2:(k,k)\to(n,n)$
  - 我们宣称：
    1. l_2 有 C_{n-k} 条不同的路径数。
    2. l_1 有 C_{k-1} 条不同的路径数。因为 l_1 的第一步一定是向右 $+1$，而最后一步则一定是向上 $+1$.

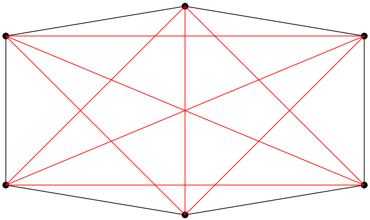
从而 C_n 满足：

$$C_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_iC_{n-1-i}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

现在我们来考虑如下的问题：在一个凸 n 边形中，存在很多条对角线。

- 一共有多少条对角线?

一共有 $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3) = \frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

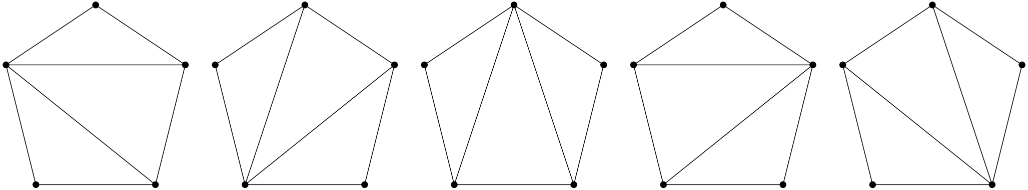


三角剖分 (II)

我们考虑利用这些对角线将凸 n 边形划分成若干个不相交的三角形：

- 使用的对角线满足除了在顶点上其余地方并不相交。

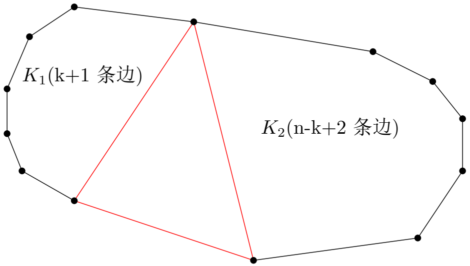
下图都是凸 5 边形的情况，我们将一种方案称为一个三角剖分。问题是对于凸 n 边形，一共有多少种不同的三角剖分方案？



三角剖分的个数

现在我们来求解这个问题。我们令 C_n 表示凸 $n+2$ 边形的三角剖分个数。特别的，我们令 $C_0=1$。现在考察凸 n 边形中的一条边，在任意一个三角剖分中，其将成为某个三角形的一条边；并且该三角形将凸 n 边形划分成两部分：

- 一部分是凸 $k+1$ 边形。
- 另一部分则是一个凸 $n-k+2$ 边形。



从而由乘法原理，我们可以得到 C_n 满足：

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}C_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-1-k}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

最后我们用生成函数的方法来推导一下上述递推式：令 $C_0, C_1, \ldots C_n, \ldots$ 对应的生成函数为 $H(x)$，注意到：

$$(H(x))^2 = C_0^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + \ldots + \sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k}x^k + \cdots$$

即我们有：

$$x(H(x))^2 = C_1x + C_2x^2 + \cdots C_nx^n + \cdots = H(x) - 1$$

从而我们可解得：

$$H(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2X}$$

注意到 $H(0) = 1$，从而 $H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$($\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ 在 0 处的极限是 -1)

由牛顿二项式定理可得:

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} (-4x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

从而我们有:

$$H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k$$

即 $C_n = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$，我们将这个数列称为 Catlan 数。

Catlan 数简介

Catlan 数具有许多性质，除了上面的性质以外我们还有:

- $C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$
- $C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (\binom{n}{i})^2$

无所不在的 Catlan 数!

Catlan 数也出现在很多计数问题当中:

- 进出栈顺序。
- 括号匹配个数。
- 圆内不相交弦的个数
- 满二叉树的个数。

本章总结

- 组合问题举例
  - 基本计数方法
- 组合数
  - 组合数的实际意义
  - 组合恒等式证明方法
  - 组合数的估计
- 生成函数
  - 牛顿二项式定理、生成函数概念。
  - Catlan 数介绍。