



上海师范大学
Shanghai Normal University

《离散数学》

4-一阶逻辑 (I)(First-Order Logic(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 10 月 20 日



- 命题与联结词
 - 命题的概念、联结词。
- 命题公式
 - 概念、等值演算、范式
- 推理和证明
 - 推理的形式结构。
 - 不同的证明系统，如自然推理系统。

► 一阶逻辑的基本概念

考虑如下的推理：

1. 所有人都会死。
2. 苏格拉底是人。
3. 苏格拉底会死。

如果使用命题逻辑去描述，需要令上述三个命题分别为 p, q, r ，则推理过程为：

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

然而这个推理形式并不是重言式。

这意味着我们需要进一步对命题进行分解。比如考虑如下两个命题：

1. 张三是学生。
2. 李四是学生。

-
- 在命题逻辑中，这两个命题只能以不同的符号去表示，如 p, q 等。
 - 但这两个命题又有共同点，其都描述了“是学生”这一属性。
 - 如果我们令 P 表示是学生这一属性，则我们还需要定义 P 的主语，如 $P(\text{张三})$, $P(\text{李四})$ 。
 - 令 x 表示主语，则 $P(x)$ 表示为 x 是学生，通常 $P(x)$ 就是我们所称的谓词 (Predicate)。

我们首先对上述例子中出现的例如张三、李四等作一个概括-个体词 (主词)。

个体词

个体词指的是研究对象中独立存在的具体或抽象的客体。

- 个体常项 (常元): 具体特定的个体, 一般用 a, b, c 表示。
- 个体变项 (变元): 不确定泛指的个体, 一般用 x, y, z 表示。

个体域 (论域)

个体变项的取值范围称为个体域 (论域)。

- 论域可以有穷集合, 如 $\{1, 2, 3\}$ 等。
- 论域也可以是无穷集合, 如 $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 等。
- 特殊的个体域: 由一切事物组成的论域, 称作全总个体域。

- **一元谓词:**

在一个命题里，如果主词只有一个，这时表示该主词性质或属性的词便称为一元谓词，以 $P(x), Q(x), \dots$ 表示。

- **多元谓词:**

在一个命题里，如果主词多于一个，这时表示该主词之间关系的词便称为多元谓词，以 $P(x, y), Q(x, y), R(x, y, z), \dots$ 表示。

-
- | | |
|--------------|-----------------------|
| • 张三和李四是表兄弟。 | “... 是表兄弟” 是谓词。 |
| • 5 大于 3。 | “... 大于 ...” 是谓词。 |
| • 天津位于北京的东南。 | “... 位于 ... 的东南” 是谓词。 |

我们称含 n 个个体变元 $x_1, \dots, x_n$ 的谓词为 **n 元谓词**。

- **一元谓词** $P(x)$: 用来描述个体的属性。
- **多元谓词** $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$: 用来描述个体间的关系。

0 元谓词?

- 就是命题! 因为其是独立于任何个体变元的陈述句。
- 谓词逻辑是命题逻辑的推广。

在一阶逻辑中，谓词实际上反映了个体之间性质的关系，即谓词可以看成是一个映射。

定义 1.

令个体域为 D ，则 n 元谓词 $P(x_1, \dots, x_n)$ 可以看作是 D^n 到 $\{0, 1\}$ 的映射。

关于谓词

$P(x)$ 具有命题的形式，但不是命题。只有 x 取定个体常元时， $P(x)$ 才是命题。

- 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数，则 $P(3)$ 是命题，真值为 T 。
- 令 $Q(x, y)$ 表示 x 大于 y ，则 $Q(2, 3)$ 是命题，真值为 F 。

既然存在个体变量，我们也可以引入函数的概念。

- $\text{father}(x)$ 表示 x 的父亲。
- $\text{mother}(x)$ 表示 x 的母亲。
- ...

与谓词不同，函数是**个体域之间**的映射。其不是一个谓词，但可以嵌入在谓词当中使用。

- 若 $P(x)$ 表示 x 是教师， $\text{dad}(x)$ 表示 x 的父亲，则 $P(\text{dad}(x))$ 表示 x 的父亲是教师。
- 张三的父亲和李四的哥哥是同事可描述成 $\text{COLLEAGUE}(\text{dad}(\text{张三}), \text{brother}(\text{李四}))$ ，其中 $\text{COLLEAGUE}(x, y)$ 表示 x 和 y 是同事。

一般约定，函数用小写字母表示，而谓词用大写字母表示。

再回顾一下有关苏格拉底的推理：

1. 所有人都会死。
2. 苏格拉底是人。
3. 苏格拉底会死。

我们还没处理的点在于“**所有**”这个词，这个词衡量了个体的数量，也联系起了两个命题之间的关系。因此我们引入**量词**的概念。

定义 2

[量词].

表示个体词数量的关系词称为量词，一共有两种量词：

- 全称量词 $\forall x$ ，意味对**所有的** x 。
- 存在量词 $\exists x$ ，意味着**存在一个** x 。

例 3.

所有人都会死。

- “所有”即表示个体变元数量的词。
- 假设此时个体域为所有的人，令 $P(x)$ 表示 x 会死，则上述命题可以表示为： $\forall xP(x)$ 。

命题 $\forall xP(x)$

命题 $\forall xP(x)$ 为真，当且仅当对于论域中的**每一个**个体 x ， $P(x)$ 都为真。

命题 $\forall xP(x)$ 为假，当且仅当**存在一个**个体 x_0 ，使得 $P(x_0)$ 为假。

例 4.

有的人都会死。

- “有的”即表示个体变元数量的词。
- 假设此时个体域为所有的人，令 $P(x)$ 表示 x 会死，则上述命题可以表示为： $\exists xP(x)$ 。

命题 $\exists xP(x)$

命题 $\exists xP(x)$ 为真，当且仅当**存在一个**论域中的个体 x_0 ， $P(x_0)$ 为真。

命题 $\exists xP(x)$ 为假，当且仅当对于论域中的**每一个**个体 x ， $P(x)$ 为假。

量词实际上表示对变元的一种约束。

- $\forall xP(x)$ 中 $P(x)$ 的 x 收到了前面全称量词的约束，即 x 必须是论域中的每一个个体。我们称被量词约束的变元为**约束变元**。
- $P(x)$ 中的 x 则没有被任何量词所约束，因此我们称其是**自由变元**。

例 5.

在 $(\forall xP(\textcolor{red}{x})) \vee Q(\textcolor{teal}{x})$ 中，红色 $\textcolor{red}{x}$ 是约束变元，绿色 $\textcolor{teal}{x}$ 是自由变元。

通过是否受到量词的影响，我们将变元分成了约束变元和自由变元。我们下面也要给出量词的作用范围。

定义 6

[辖域].

量词所约束的范围称为量词的辖域。

- $\forall xP(x, y)$ 中 $P(x, y)$ 是 $\forall x$ 的辖域。
- $\forall xP(x, y) \vee Q(x)$ 中 $P(x, y)$ 是 $\forall x$ 的辖域。
- $\exists x\forall yP(x, y)$ 中， $\exists x$ 的辖域为 $\forall yP(x, y)$ ， $\forall y$ 的辖域为 $P(x, y)$ 。

量词是否可以交换？

- | | |
|---|-----|
| • $\forall x\forall yP(x, y)$ 和 $\forall y\forall xP(x, y)$ 是否相同？ | 是！ |
| • $\exists x\exists yP(x, y)$ 和 $\exists y\exists xP(x, y)$ 是否相同？ | 是！ |
| • $\forall x\exists yP(x, y)$ 和 $\exists y\forall xP(x, y)$ 是否相同？ | 不是！ |

- 对于公式 $\forall xP(x)$ ，将其中的 x 改为 y ，则得到的公式是相同的。
 - $\forall xP(x) = \forall yP(y)$ 。
- 对于公式 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y))$ ，将其中的 x 改为 y ，则新得到的公式是不相同的。
 - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \neq \forall y(P(y) \rightarrow Q(y, y))$ 。

什么样的情况变元易名不会改变相应的公式？

- 不严谨地说，使用辖域内未曾出现的符号去替代对应的变元。

由上述定义可以看到，论域的无限性导致了对带有量词的公式的真值判断变的困难。

当论域是有限的时候, 比如用 $\{1, \dots, k\}$ 来表示, 又有什么变化?

析取 $\vee$ 与合取 $\wedge$ 的拓展

- $\forall x P(x)$ 实际上表示得是 $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$.
- $\exists x P(x)$ 实际上表示得是 $P(1) \vee P(2) \vee \dots \vee P(k)$.

用 0 元谓词符号化命题

- 墨西哥位于南美洲。
- 只有 2 是素数，4 才是素数。
- 如果 5 大于 4，则 4 大于 6。

1. 令 a 表示墨西哥， $F(x)$ 表示 x 位于南美洲，则命题可表示为 $F(a)$ 。
2. 令 $P(x)$ 表示 x 是素数，则命题可表示为 $P(2) \rightarrow P(4)$ 。
3. 令 $P(x, y)$ 表示 x 大于 y ，则命题可表示为 $P(5, 4) \rightarrow P(4, 6)$ 。

带有量词的形式化

将下列命题分别在如下论域中进行符号化：

- 所有人都要吃饭。
- 有人用左手写字。

其中论域为：

1. 人类集合。
2. 全总个体域。

- 当论域为全体人类时：
 1. $\forall xP(x)$, 其中 $P(x)$ 表示 x 要吃饭。
 2. $\exists xQ(x)$, 其中 $Q(x)$ 表示 x 用左手写字。
- 当论域为全总个体域时：

为什么第一个不能翻译成 $\forall x(M(x) \wedge P(x))$?

 1. $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$, 其中 $P(x)$ 表示 x 要吃饭, $M(x)$ 表示 x 是人。
 2. $\exists x(M(x) \wedge Q(x))$, 其中 $Q(x)$ 表示 x 用左手写字, $M(x)$ 表示 x 是人。

带有量词的形式化

请形式化下列命题：

- 没有无理数是有理数。
- 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数， $Q(x)$ 表示 x 是无理数，则命题可表示为 $\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$ 。

逻辑上不同的等价形式

事实上，上述命题也可以形式化成如下两个等价形式：

- $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ 。
- $\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$ 。

自然数集

我们可以用下面三句话作为公理定义出自然数集：

1. 对每个数，有且仅有一个相继后元。
2. 0 不是任何数的相继后元。
3. 对除 0 以外的数，有且只有一个相继前元。

现在请以论域是自然数集，形式化上述语句。

准备工作：

- 谓词 $E(x, y)$ 表示 $x = y$ 。
- 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别表示 x 的相继后元和相继前元，即 $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$ 。
- 唯一性可以通过描述如果存在两个，则两个必相等来表示。

对每个数，有且仅有一个相继后元。

- $\forall x \exists y (E(f(x), y) \wedge (\forall z E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)))$ 。

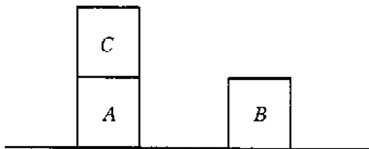
0 不是任何数的相继后元。

- $\neg \exists x E(0, f(x))$ 。

对除 0 以外的数，有且只有一个相继前元。

- $\forall x (\neg E(x, 0) \rightarrow \exists y (E(y, g(x)) \wedge \forall z (E(z, g(x)) \rightarrow E(z, y))))$ 。

如图所示:



定义如下谓词:

- $ON(x, y)$: 表示 x 在 y 上。
- $CLEAR(x)$: 表示 x 上没有积木。

则 $CLEAR$ 和 ON 之间的关系可以表示成什么?

$$\forall x (CLEAR(x) \rightarrow \neg \exists y ON(y, x))$$



一阶逻辑的基本概念

- 命题逻辑的局限性。
- 个体词、谓词的基本概念。
- 量词的基本概念。
- 自然语言的形式化。

► 一阶逻辑的合式公式

在讲述一阶逻辑的合式公式之前，首先先来回顾一下命题逻辑的合式公式的定义：

定义 7

[命题公式].

命题公式，又称命题逻辑的**合式公式**(Well Formed Formula)，由下述条件递归定义给出：

1. 命题常量和命题变元是命题公式，其也被称为原子命题公式。
2. 如果 p, q 是命题公式，则 $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ 也是命题公式。
3. 所有命题公式都可以通过有限次的上述规则得出。

直观上来讲，似乎只要**补上对量词的构造**即可。

定义 8

[一阶逻辑的公式定义?]

一阶逻辑，或者谓词逻辑的**合式公式**(Well Formed Formula)，由下述条件递归定义给出：

1. 原子公式是合式公式。
2. 若 A, B 是合式公式，则 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式。
3. 若 A 是合式公式，则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式。
4. 所有合式公式都可以通过有限次的上述规则得出。

但怎么定义一阶逻辑里的**原子公式**？

- 令 $P(x)$ 是一个谓词, f 是一个函数，显然：

$$P(x), P(f(x)), P(f(f(x))), \dots$$

都是**不能由联结词和量词**产生的公式。

为了更准确的定义原子公式，我们需要引入项 (term) 的概念，首先我们介绍**字母表**。

定义 9

[字母表 (Alphabet)].

一阶逻辑 (一阶语言, First-order Language) 的字母表包含以下符号:

1. 个体变元: $x, y, z, \dots$
2. 逻辑联结词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. 量词: $\forall, \exists$
4. 标点符号: $(,), ,$
5. 相等符号: $\equiv$
6.
 - a 常元: $a, b, c, \dots$
 - b 函数符号: $f, g, h, \dots$
 - c 关系符号 (谓词): $P, Q, R, \dots$

- 上述定义的 1 ~ 5 称为逻辑符号，一般用 $\mathcal{A}$ 表示。这部分符号是不会变的。
- 第 6 条则是非逻辑符号，一般用 $\mathcal{S}$ 表示。 $\mathcal{S}$ 可以为空，这部分符号是可以改变的。

因此不同的 $\mathcal{S}$ 可以定义不同的一阶语言。所以在有混淆时我们会称这是由 $\mathcal{S}$ 定义出的一阶语言。

定义 10

[项].

由符号集 $\mathcal{S}$ 定义出的 $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ 上的项 (term) 由下述条件递归定义给出:

1. 个体变元是项。
2. 常元是项。
3. 若 f 是 n 元函数符号, $t_1, \dots, t_n$ 是项, 则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 是项。
4. 所有项都可以通过有限次的上述规则得出。

我们现在可以给出一阶逻辑的合式公式的定义了。

定义 11

[一阶逻辑的公式定义].

令 S 是一个符号集, 则由 S 定义出的一阶逻辑, 或者谓词逻辑的合式公式(Well Formed Formula), 由下述条件递归定义给出:

1. 如果 t_1 和 t_2 是项, 则 $t_1 \equiv t_2$ 是合式公式。
2. 如果 $t_1, \dots, t_n$ 是项, R 是 n 元谓词, 则 $R(t_1, \dots, t_n)$ 是合式公式。
3. 若 A, B 是合式公式, 则 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式。
4. 若 A 是合式公式, 则 $\forall xA$, $\exists xA$ 也是合式公式。
5. 所有合式公式都可以通过有限次的上述规则得出。

公式的 1 和 2 也被称为原子公式, 因为其不由任何其他的合式公式构造而成。我们会使用 $\phi, \varphi, \dots$ 等小写希腊字母表示一个公式。

为什么需要这么一个定义?

考察一个这样的例子, 令 S 是个符号集, 其包含一个常元 e 和一个运算符号 $+$, 显然我们希望其定义出的一阶逻辑语言是类似下面这样的:

- $e \equiv e$.
- $e + x_1 \equiv x_2$.
- $\exists x_1 (e \equiv e \wedge x_1 \equiv x_2)$.

而不是:

- $\equiv \wedge e$.
- $e \vee e$
- $\dots$.

我们现在也可以用严格的方式来定义出一个公式的变元和自由变元。令 $\text{Var}(t)$ 和 $\text{free}(\varphi)$ 分别表示对一个项和一个公式中的**变元**和**自由变元**的集合，则我们有：

- Var 的定义如下：
 1. $\text{Var}(x) = \{x\}$ 。
 2. $\text{Var}(a) = \emptyset$ 。
 3. $\text{Var}(f(t_1, \dots, t_n)) = \text{Var}(t_1) \cup \dots \cup \text{Var}(t_n)$ 。
- free 的定义如下：
 1. $\text{free}(t_1 \equiv t_2) = \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$ 。
 2. $\text{free}(P(t_1, \dots, t_n)) = \text{Var}(t_1) \cup \dots \cup \text{Var}(t_n)$ 。
 3. $\text{free}(\neg\varphi) = \text{free}(\varphi)$ 。
 4. $\text{free}((\varphi * \phi)) = \text{free}(\varphi) \cup \text{free}(\phi)$ ，这里 $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 。
 5. $\text{free}(\forall x\varphi) = \text{free}(\exists x\varphi) = \text{free}(\varphi) \setminus \{x\}$ 。

我们将没有出现自由变元的合式公式称为是**闭**的。

现在假设我们由某个符号集 s 已经定义好了一个一阶语言里的的合式公式，比如：

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x, y)))$$

表示的是什么含义？

为了回答这个问题，我们需要引入**解释**的概念。

关于语法

所谓**语法 (syntax)**，就是根据规则所构造出来的，如我们之前所阐述的，其没有任何意义，但显然胡乱定义出来的显然是是我们不希望的。

审视一下所定义的公式，我们有：

- 一个符号集 S ，其中包括常量符号，函数符号，关系符号。
- 变量符号。

所以一个解释需要解释清楚什么？

-
- 常量符号指代的是什么？
 - 函数符号、关系符号指代的又是什么关系？
 - 变量符号的范围是什么？自由变元的取值是什么？

关于语义

所谓语义 (semantics), 就是对语法所构造出来的公式进行解释，使其有意义。

为了解决符号集的意义，首先我们需要明确其在哪个范围内。

- 指定一个非空个体域 $\mathcal{D}$ 。

有了论域 $\mathcal{D}$ 后我们便可以对符号进行解释了，我们将其整体视作一个映射 α ：

- 对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个常量符号 a , $\alpha(a)$ 表示 $\mathcal{D}$ 中的一个元素。
- 对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个 n 元函数符号 f , $\alpha(f)$ 表示 $\mathcal{D}^n$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个映射。
- 对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个 n 元关系符号 R , $\alpha(R)$ 表示 $\mathcal{D}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的一个映射。

在有的书中，也将 $\mathfrak{A} = (\mathcal{D}, \alpha)$ 称为一个 $\mathcal{S}$ 上的结构 $\mathfrak{A}$ ($\mathcal{S}$ -structure)。

这一步其实比较简单，我们只需要指定一个赋值函数即可。

- **赋值 σ** : 对每一个变量符号 x , $\sigma(x)$ 表示 $\mathcal{D}$ 中的一个元素。

注意到我们需要利用 σ 对公式中的**自由变元**进行解释，现在我们就有了对公式的一个完整解释。

定义 12

[对公式的解释].

对于 $\mathcal{S}$ 产生的一阶语言，对公式的解释由 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \sigma)$ 组成。对于一个合式公式 φ ，将其被 $\mathfrak{J}$ 替换得到的新公式记为 φ' ，则称 φ' 是 φ 在 $\mathfrak{J}$ 下的解释。

在教材中，称 $\mathfrak{A}$ 为解释。

现在令符号集 $S = \{a, f, g, F\}$, 变量符号集合为 $\{x, y, z\}$, 一个对公式的解释

$\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}(= (\mathcal{D}, \alpha)), \sigma)$ 定义如下:

- 个体域 $\mathcal{D}$ 定义为 $\mathbb{N}$ 。
- $\alpha(a) = 0$ 。
- $\alpha(f)(x, y) = x + y$, $\alpha(g)(x, y) = x \cdot y$ 。
- $\alpha(F)(x, y) = (x \equiv y)$ 。
- $\sigma(x) = 1$, $\sigma(y) = 2$, $\sigma(z) = 3$ 。

则在在 $\mathfrak{J}$ 下

- $F(f(x, y), g(x, y))$ 的解释? $(1 + 2 = 1 \times 2)$ 假命题。
- $F(f(x, a), y) \rightarrow F(g(x, y), z)$ 的解释? $(1 + 0 = 2) \rightarrow (1 \times 2 = 3)$ 真命题。

- $\neg F(g(x, y), g(y, z))$ 的解释?
 $\neg(1 \times 2 \equiv 2 \times 3)$ 真命题。
- $\forall x F(g(x, y), z)$ 的解释?
 $\forall x x \cdot 2 = 3$ 假命题。
- $\forall x \forall y (F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$ 的解释?
 $\forall x \forall y (x + 0 \equiv y \rightarrow y + 0 \equiv x)$ 真命题。
- $\exists x F(f(x, x), g(x, x))$ 的解释?
 $\exists x x + x \equiv x \cdot x$ 真命题。
- $\forall x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall x \forall y F(x, y)$ 的解释?
 $\forall x \forall y x \equiv y \rightarrow \forall x \forall y x \equiv y$ 真命题。

有没有可能在任何一个解释下，一个公式始终都是真命题？

定义 13.

设 φ 是一个公式，若对于任何对公式的解释 $\mathfrak{J}$ ， φ 均为真，则称 φ 是一个永真式 (逻辑有效式)；若对于任何对公式的解释 $\mathfrak{J}$ ， φ 均为假，则称 φ 是一个永假式；若至少存在一个对公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下 φ 为真，则称 φ 是一个可满足式。

怎么去判断一个公式是永真式？

定义 14

[代换实例].

设 A 是含命题变项 $p_1, \dots, p_n$ 的命题公式， $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 是 n 个谓词公式，用 φ_i 代替 A 中的 p_i ，所得的公式 A' 称为 A 的代换实例。

定理 15.

1. 设 A 是一个永真式, A' 是 A 的代换实例, 则 A' 也是永真式。
 2. 设 A 是一个永假式, A' 是 A 的代换实例, 则 A' 也是永假式。
- $p \rightarrow p$ 是永真式, 从而 $\forall x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall x \forall y F(x, y)$ 也是永真式。

可满足式的代换实例?

请注意, 可满足式的代换实例不一定是可满足式, 如:

- $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x))$ 是 $\neg(p \rightarrow q)$ 的代换实例, 但前者是永假式。

公式类型判断

请判断下列公式是什么类型的，并给与相应的证明。

1. $\varphi_1 = \forall x(F(x) \rightarrow G(x)).$
2. $\varphi_2 = \exists x(F(x) \wedge G(x, y)).$
3. $\varphi_3 = \forall xF(x) \rightarrow (\exists x\exists yG(x, y) \rightarrow \forall xF(x)).$
4. $\varphi_4 = \neg(\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y)) \wedge \exists yG(y).$
5. $\varphi_5 = \forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x).$
6. $\varphi_6 = F(y) \rightarrow \exists xF(x).$

1. $\varphi_1 = \forall x(F(x) \rightarrow G(x)).$

φ_1 是可满足式, 考虑两个解释 $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$, 其论域都是在 $\mathbb{R}$ 上, 但:

- $\mathfrak{J}_1$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是有理数, $G(x)$ 定义 x 为实数。
- $\mathfrak{J}_2$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是有理数, $G(x)$ 定义 x 为无理数。

则 φ_1 在 $\mathfrak{J}_1$ 下为真, 在 $\mathfrak{J}_2$ 下为假。

2. $\varphi_2 = \exists x(F(x) \wedge G(x, y)).$

φ_2 是可满足式, 考虑两个解释 $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$, 其论域都是在 $\mathbb{R}$ 上, 但:

- $\mathfrak{J}_1$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是自然数, $G(x, y)$ 定义 $x \equiv y$, 自由变元 y 被赋值为 1。
- $\mathfrak{J}_2$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是自然数, $G(x, y)$ 定义 $x \equiv y$, 自由变元 y 被赋值为 -1 。

则 φ_2 在 $\mathfrak{J}_1$ 下为真, 在 $\mathfrak{J}_2$ 下为假。

3. $\varphi_3 = \forall x F(x) \rightarrow (\exists x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x)).$

φ_3 是永真式，因为它是重言式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例

4. $\varphi_4 = \neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y).$

φ_4 是永假式，因为它是矛盾式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例

5. $\varphi_5 = \forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x).$

φ_5 是永真式，因为对于 φ_5 的任何一个解释 $\mathfrak{J}$ ，若 $\forall x F(x)$ 为真，其则对论域 $\mathcal{D}$ 中任何一个元素 x 都有 $F(x)$ 为真，所以 $\exists x F(x)$ 为真，从而 φ_5 为真。

6. $\varphi_6 = F(y) \rightarrow \exists x F(x).$

φ_6 是永真式，因为对于 φ_6 的任何一个解释 $\mathfrak{J}$ ，若其对 y 的赋值令 $F(a(y))$ 为真，则 $\exists x F(x)$ 为真，从而 φ_6 为真。

本章总结

- 一阶逻辑的基本概念
 - 个体词、谓词、量词。
 - 自然语言的形式化。
- 一阶逻辑合式公式。
 - 项、合式公式的定义。
 - 解释的概念。
 - 公式类型。