



上海师范大学
Shanghai Normal University

《离散数学》

5-一阶逻辑 (II)(First-Order Logic(II))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 10 月 31 日



- 基本概念
 - 个体词、谓词、量词。
 - 自然语句的形式化。
- 一阶逻辑公式
 - 字符表、项的概念
 - 解释的概念



- › 一阶逻辑等值式
- › 一阶逻辑的前束范式
- › 一阶逻辑的推理

► 一阶逻辑等值式

如果没有特殊说明的话，我们讨论的公式都是假定由符号集 $\mathcal{G}$ 定义出来的一阶语言 $\mathcal{L}$ 。

与命题逻辑相同，我们引入等值式的概念。

定义 1

[一阶逻辑的等值式].

令 A, B 是两个一阶逻辑中的公式，称 A, B 是等值的，当且仅当对于任何一个对于公式的解释 A 和 B 都有相同的真值，记作 $A \Leftrightarrow B (A = B)$ 。

等值式的等价定义

令 A, B 是两个一阶逻辑中的公式，称 A, B 是等值的，当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式（普遍有效式）。

与命题逻辑不同的是，我们现在没有真值表这一手段来验证两个公式等值了！

命题逻辑等值公式

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
2. $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A, A \rightarrow A \Leftrightarrow 1, A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
3. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$
4. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C, A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
5. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
6. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
 $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow B$
7. $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$



命题逻辑等值公式

- 8. $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0, A \rightarrow 1 \Leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
- 9. $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A, 1 \rightarrow A \Leftrightarrow A, 1 \leftrightarrow A \Leftrightarrow A, A \rightarrow 0 \Leftrightarrow \neg A, 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow \neg A$
- 10. $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1, A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0, A \rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A, A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0$
- 11. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- 12. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- 13. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- 14. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
- 15. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$
- 16. ...

在一阶逻辑公式中，原先命题逻辑公式的等值式依旧是**成立**的。

- 从原来的**命题变项**变成了一阶语言中的公式。

例 2.

下列公式都是等值的：

1. $P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow (\neg P(x) \vee Q(x))$ 。
2. $\neg(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$
3. $\neg\neg(\forall xP(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)$ 。
4. $(\forall xP(x) \wedge Q(y)) \vee \exists zR(z) \Leftrightarrow (\forall xP(x) \vee \exists zR(z)) \wedge (Q(y) \vee \exists zR(z))$

考察对带有量词的公式的否定:

- $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x).$
- $\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x).$

对上述等值式的理解

- 形式上来看, $\neg$ 可以越过量词, 但是量词需要进行变换。
- 从语义上理解, 如 $\neg \forall x P(x)$ 表示的是“不是所有的 x 都满足 $P(x)$ ”, 即“存在一个 x 不满足 $P(x)$ ”, 即 $\exists x \neg P(x)$ 。

和德摩根律有点像?

假设现在的个体域是有限的, 即 $\mathcal{D} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 我们来证明上述等值式。

1. $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$.

$$\begin{aligned}\neg \forall x P(x) &\Leftrightarrow \neg (P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg P(x)\end{aligned}$$

2. $\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$.

$$\begin{aligned}\neg \exists x P(x) &\Leftrightarrow \neg (P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \dots \wedge \neg P(a_n) \\ &\Leftrightarrow \forall x \neg P(x)\end{aligned}$$

有限域下其实就是德摩根律!

我们只给出第一个证明，第二个的证明是几乎一样的。

证明： $[\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)]$ 的证明]

- 设对于公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下我们有 $\neg \forall x P(x)$ 为真，从而 $\forall x P(x)$ 为假。即存在一个 $a_i \in \mathcal{D}$ 使得 $P(a_i)$ 为假，从而 $\neg P(a_i)$ 为真。因此有 $\exists x \neg P(x)$ 为真。
- 反过来设对于公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下我们有 $\exists x \neg P(x)$ 为真，从而存在一个 $a_i \in \mathcal{D}$ 使得 $\neg P(a_i)$ 为真，从而 $P(a_i)$ 为假。因此有 $\forall x P(x)$ 为假，从而 $\neg \forall x P(x)$ 为真。

1. 并非所有的动物都是猫。

令 $A(x)$: x 是动物, $B(x)$: x 是猫, 则该命题可以表示为: $\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$.
并且我们有:

$$\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x\neg(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$$

$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ 表示存在一个动物不是猫, 意思是等同的。

2. 天下乌鸦一般黑。

令 $F(x)$: x 是乌鸦, $G(x, y)$: x 和 y 一般黑, 则该命题可以表示为:

$$\forall x\forall y((F(x) \wedge F(y)) \rightarrow G(x, y)).$$

并且我们有:

$$\forall x\forall y((F(x) \wedge F(y)) \rightarrow G(x, y)) \Leftrightarrow \neg(\exists x\exists y((F(x) \wedge F(y)) \wedge \neg G(x, y)))$$

$\neg(\exists x\exists y((F(x) \wedge F(y)) \wedge \neg G(x, y)))$ 表示不存在两只乌鸦一般黑, 意思是等同的。

我们之前说过，下述公式都是不相等的：

- $\forall x(P(x) \vee \varphi)$ 与 $\forall xP(x) \vee \varphi$ 。
- $\exists x(P(x) \wedge \varphi)$ 与 $\exists xP(x) \wedge \varphi$ 。

但是当后半部分“ φ ”不包含该变元 x 时，上述公式则可以成立，我们将其称为量词分配的等值式。

量词对 $\wedge, \vee$ 的分配律

当公式 q 不包含变元 x 的时候，我们有：

1. $\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee q$ 。
2. $\forall x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge q$ 。
3. $\exists x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee q$ 。
4. $\exists x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge q$ 。

我们依旧只给出第一个证明，其余都是雷同的。**证明：**[对 $\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee q$ 的证明]

- 设在公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下，我们有 $\forall x(P(x) \vee q)$ 为真。则对于任何的 $a_i \in \mathcal{D}$ 我们有 $P(a_i) \vee q$ 为真。
 - 若 q 为真，则 $\forall xP(x) \vee q$ 为真。
 - 若 q 为假，则 $P(x)$ 对于所有的 $a_i \in \mathcal{D}$ 均为真，从而 $\forall xP(x)$ 为真因此 $\forall xP(x) \vee q$ 在公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下也为真。
- 设在公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下，我们有 $\forall xP(x) \vee q$ 为真。
 - 若 q 为真，则 $\forall x(P(x) \vee q)$ 为真。
 - 若 q 为假，则 $\forall xP(x)$ 为真，从而 $P(x)$ 对于所有的 $a_i \in \mathcal{D}$ 均为真，从而 $P(a_i) \vee q$ 对于所有的 $a_i \in \mathcal{D}$ 为真，从而 $\forall x(P(x) \vee q)$ 为真。因此 $\forall x(P(x) \vee q)$ 在公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下也为真。

显然，量词对 $\rightarrow$ 也有分配律。

量词对 $\rightarrow$ 的分配律

当公式 p, q 不包含变元 x 的时候，我们有：

1. $\forall x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \rightarrow q$ 。
2. $\exists x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow q$ 。
3. $\forall x(p \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow p \rightarrow \forall xP(x)$ 。
4. $\exists x(p \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow p \rightarrow \exists xP(x)$ 。

我们依旧只给出第一个证明，其余都是雷同的。**证明：**[对 $\forall x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \rightarrow q$ 的证明]

- 设在对公式的解释 $\mathcal{J}$ 下，我们有 $\forall x(P(x) \rightarrow q)$ 为真。则对于任何的 $a_i \in \mathcal{D}$ 我们有 $P(a_i) \rightarrow q$ 为真。
 - 若存在 $P(a_i)$ 为真，则 $\exists xP(x)$ 和 q 均为真，即 $\exists xP(x) \rightarrow q$ 为真。
 - 若对所有的 a_i ， $P(a_i)$ 均为假，则 $\exists xP(x)$ 为假，从而 $\exists xP(x) \rightarrow q$ 为真。

因此 $\exists xP(x) \rightarrow q$ 在对公式的解释 $\mathcal{J}$ 下也为真。

- 设在对公式的解释 $\mathcal{J}$ 下，我们有 $\exists xP(x) \rightarrow q$ 为真。
 - 若 $\exists xP(x)$ 为真，则 q 为真，现在考察所有的 $a_i \in \mathcal{D}$ ：
 - * 若 $P(a_i)$ 为真，则 $P(a_i) \rightarrow q$ 为真。
 - * 若 $P(a_i)$ 为假，则 $P(a_i) \rightarrow q$ 为真。

从而 $\forall x(P(x) \rightarrow q)$ 为真。

- 若 $\exists xP(x)$ 为假，则对于任意的 $a_i \in \mathcal{D}$ ， $P(a_i)$ 为假，从而 $P(a_i) \rightarrow q$ 均为真。因此 $\forall x(P(x) \rightarrow q)$ 为真。

因此 $\forall x(P(x) \rightarrow q)$ 在对公式的解释 $\mathcal{J}$ 下也为真。

对 $\rightarrow$ 分配律的证明 (II)

注意到 $\rightarrow$ 其实可以由 $\wedge, \vee, \neg$ 来表示, 因此我们也可以使用**等值演算**的方式。

证明: [对 $\forall x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow q$ 的证明]

我们有:

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \rightarrow q) &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee q) & (p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\ &\Leftrightarrow \neg \neg \forall x(\neg P(x) \vee q) & (\neg \neg p \Leftrightarrow p) \\ &\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (\neg P(x) \vee q) & (\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)) \\ &\Leftrightarrow \neg \exists x (P(x) \wedge \neg q) & (\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow \neg (\exists x P(x) \wedge \neg q) & (\exists x (P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge q) \\ &\Leftrightarrow \neg (\exists x P(x)) \vee q & (\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow (\exists x P(x)) \rightarrow q & (p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q)\end{aligned}$$

一般情况下的分配律: $\forall$ 对 $\wedge$, $\exists$ 对 $\vee$



当量词约束变元同时存在于两个公式的时候, 我们依旧存在一些分配律:

- $\forall$ 对 $\wedge$: $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 。
- $\exists$ 对 $\vee$: $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ 。

注意: 另外两个分配律则不成立!

这种情况下, $\forall$ 对 $\wedge$, $\exists$ 对 $\vee$ 没有分配律, 即:

- $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \forall xQ(x)$ 。
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ 。

直观上的解释

事实上, $\forall$ 可以看作是对 $\wedge$ 的推广, $\exists$ 是对 $\vee$ 的推广。所以上述规律实际上是 $\vee$, $\wedge$ 交换律的推广。但当 $\vee$ 和 $\wedge$ 交替的时候, 其是不能交换的。

我们依旧只给出第一个证明，另外一个雷同的。

证明： [对 $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 的证明]

- 假设对于一个公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真。则对于任何的 $a_i \in \mathcal{D}$ 我们有 $P(a_i) \wedge Q(a_i)$ 为真。从而 $P(a_i)$ 为真， $Q(a_i)$ 为真。因此 $\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 均为真。因此 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 在解释 $\mathfrak{J}$ 下也为真。
- 假设对于一个公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 为真。则 $\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 在该解释下均为真，即对于任何的 $a_i \in \mathcal{D}$ ， $P(a_i)$ 和 $Q(a_i)$ 均为真。因此 $P(a_i) \wedge Q(a_i)$ 为真，从而 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 在解释 $\mathfrak{J}$ 下也为真。

▶ $\forall$ 对 $\vee$ 、 $\exists$ 对 $\wedge$ 不成立的理解 (I)

前面我们直观的介绍上述不成立的原因，现在我们从有限域 $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$ 上给出一个严格的证明。

证明： [证明 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$]

我们有：

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \vee Q(x)) &\Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \\ &\Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))\end{aligned}$$

而

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))$$

因此： $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

∀ 对 ∨、∃ 对 ∧ 不成立的理解 (II)

从上述证明可以得到一个简单的推论：

- 在有限域 $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$ 中我们有 $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$ ，这里 $\Rightarrow$ 表示如果前者为真则后者也为真。

事实上这一结论对任意论域都是成立的，并且类似的结论对于 $\exists$ 对 $\wedge$ 也是成立的，即：

- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$ 。
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 。

消去量词

从上述例子我们也可以看到，在论域是有限的情况下，我们可以通过 $\forall, \exists$ 把量词消去。

之前我们就提到过像 $\forall xP(x)$ 与 $\forall yP(y)$ 是等值的，也就是说，一些约束变元的名字是可以随意更改的。这一规则我们称为**换名规则**。

定义 3

[换名规则].

令 A 是一个公式，若 x 是一个约束变元， y 是一个**不在 A 中出现的自由变元**，则 A 与 $A(\frac{y}{x})$ 等值，其中 $A(\frac{y}{x})$ 表示将 A 中约束 x 的量词辖域内的所有 x 替换成 y 得到的公式。

直观解释

直观上来说，我们可以将约束变元的名字随意更改，只要保证其不与其他变元起冲突，就不影响公式的真值。

例 4.

考察如下公式：

- $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$ 。
- $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y, z))$

通过上述的换名规则，我们可以将其转换为如下等值的公式：

- $\forall t F(t, y, z) \rightarrow \exists w G(x, w, z)$ 。
- $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists w G(x, w, z))$

即通过上述的规则我们可以使得一个公式里面的变元**要么是自由变元，要么是约束变元**。

最后我们给出两个一阶逻辑中**等值演算**的例子。

证明： $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

证明： 我们有：

$$\begin{aligned}\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) &\Leftrightarrow \forall x \neg(M(x) \wedge F(x)) && (\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x (\neg M(x) \vee \neg F(x)) && (\text{De Morgan 律}) \\ &\Leftrightarrow \forall x (M(x) \rightarrow \neg F(x)) && (p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q)\end{aligned}$$

证明: $\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$

证明: 我们有:

$$\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \Leftrightarrow \exists x\neg\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$$
$$(\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$$
$$(\neg\forall yP(y) \Leftrightarrow \exists y\neg P(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee H(x, y))$$
$$(p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)) \quad (\text{De Morgan 律})$$

► 一阶逻辑的前束范式



我们在命题逻辑中介绍了命题逻辑公式的范式-合取范式和析取范式。

范式是一种统一的表达形式，可以用来研究公式的性质。

- 在命题逻辑公式中，如果两个公式是等值的，则它们形成的析取范式 (合取范式) 也是等值的。
- 在命题逻辑公式中，如果两个公式是等值的，则它们形成的主析取范式 (主合取范式) 是完全一样的。

在一阶逻辑中，我们也有类似的范式概念。

我们来介绍最常用的一种范式：**前束范式**。

定义 5

[一阶逻辑的前束范式].

具有如下形式的公式称为一阶逻辑的前束范式：

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \varphi$$

这里 Q_i 是一个量词 $\forall, \exists$ 。 φ 是一个不含有量词的公式。

直观理解

前束范式的直观理解是：量词全部出现在公式的**最前面**，且量词的辖域包含整个公式。

例 6.

下述式子**都是**前束范式:

1. $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)).$
2. $\forall x \forall y \exists z ((F(x) \wedge G(y) \wedge H(z)) \rightarrow L(x, z)).$

下述式子**不是**前束范式:

1. $\forall x G(x) \rightarrow \exists y F(x, y).$
2. $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists z G(z).$

定理 7

[前束范式存在定理].

任何一阶逻辑公式都可以转换成等值的前束范式。

简单来说，求前束范式需要做如下几件事：

1. $\neg$ 往右移。
2. $\forall, \exists$ 往左移。
3. 变元换成合适的名字。

我们用一个例子来展示前束范式怎么求。

求 $\neg(\forall x \exists y P(a, x, y) \rightarrow \exists x(\neg \forall y Q(y, b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式

1. 消去 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (非必需)

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x \exists y P(a, x, y)) \vee \exists x(\neg \neg \forall y Q(y, b) \vee R(x)))$$

2. $\neg$ 往右移。

$$\Leftrightarrow \neg(\exists x \forall y \neg P(a, x, y)) \vee \exists x(\forall y Q(y, b) \vee R(x))$$

$$\Leftrightarrow (\neg \exists x \forall y \neg P(a, x, y)) \wedge \neg \exists x(\forall y Q(y, b) \vee R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y P(a, x, y) \wedge \forall x(\exists y \neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$

3. $\forall, \exists$ 往左移 ”+” 变元易名。

$$\Leftrightarrow \forall x(\exists y P(a, x, y) \wedge (\exists y \neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\exists y P(a, x, y) \wedge (\exists z \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y \exists z (P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y \exists z S(a, b, x, y, z)$$

最后的 $S(a, b, x, y, z)$ 可以视作是 $(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$ 的一个概括表示。

前束范式只要求了量词出现在公式的最前面，但是并没有要求量词之间的顺序。因此事实上我们也可以定义出更严格的范式，如：

- 只有全称量词的范式 (Skolem 标准形)。
- 所有全称量词都在存在量词左面的范式。
- 所有存在量词都在全称量词左面的范式。

但遗憾的是，这种形式的转换不能完全的保证等值性。比如 Skolem 标准形只能保证在不可满足的意义下是一致的，即如果原来的公式是不可满足的则其 Skolem 标准形也是不可满足的。

在范式的最后我们介绍一下**全称量词 Skolem 标准形**，其能保证如果原来公式是**不可满足**的，则其**Skolem 标准形**也是不可满足的。这样的转换在归结法中有着重要的应用。

其核心的想法是，考虑如下的形式：

$$\forall x \forall y \exists z \exists w \dots$$

从语义上理解，表示为对任意的 x 和对于任意的 y ，存在一个 z 和存在一个 w ，因此 z 和 w 可以视作是依赖于 x, y 的，因此我们可以可以将 z 和 w 的选取认为是一个依赖于 x, y 的函数。即可以用 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 表示。

依照这个思路，我们可以将一个公式转换成 Skolem 标准形。

求一个公式的 Skolem 标准形首先要求出其前束范式，假设已经求好如下：

$$\exists x \forall y \forall z \exists w \forall u \exists v P(x, y, z, w, u, v)$$

我们从左往右审视所有的存在量词：

- $\exists x$ 左边没有量词，因此我们直接用论域 $\mathcal{D}$ 中的一个未在公式出现过的常元 a 去替代。
- $\exists w$ 左边存在 2 个全称量词 $\forall y, \forall z$ ，所以用一个关于 y, z 的二元函数 $f(y, z)$ 代替 w 。
- $\exists v$ 左边存在 3 个全称量词 $\forall y, \forall z, \forall u$ ，所以用一个关于 y, z, u 的三元函数 $g(y, z, u)$ 代替 w 。

从而其 Skolem 标准形为：

$$\forall y \forall z \forall u P(a, y, z, f(y, z), u, g(y, z, u))$$

一个公式和其 Skolem 标准形不等值！

► 一阶逻辑的推理

与命题逻辑相同，我们可以给出类似的推理形式。

- **推理形式：**由前提 $A_1, \dots, A_n$ 推出 B 的推理形式为：

$$\{A_1, \dots, A_n\} \Rightarrow B.$$

- **正确推理：**如果 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 是永真的，则由前提 $A_1, \dots, A_n$ 推出 B 的推理是正确的，记为：

$$\{A_1, \dots, A_n\} \models B.$$

也用 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 表示。

例 8.

考察下列推理：

所有的整数都是有理数，所有的有理数都是实数，所以所有的整数都是实数。

首先将其符号化，令 $P(x)$ 表示 x 是实数， $Q(x)$ 表示 x 是有理数， $R(x)$ 是整数，则：

- 所有的整数是有理数： $\forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$ 。
- 所有的有理数是实数： $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$ 。
- 所有的整数是实数： $\forall x(R(x) \rightarrow P(x))$ 。

因此其推理形式为：

$$\{\forall x(R(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow P(x))\} \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow P(x))$$

很显然，上述推理是**命题逻辑**所不能处理的。

由代换实例，原先命题逻辑推理里的定律都是成立的。

推理定律 (I)

以下推理定律依旧正确，将其中的 A 和 B 换成一阶公式即可。

- $A \Rightarrow (A \vee B)$ (附加律).
- $A \wedge B \Rightarrow A$ (化简律).
- $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ (假言推理律).
- $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ (拒取式)
- $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ (析取三段论).
- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$ (假言三段论)
- $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$ (等价三段论)
- ...

推理定律实际上就是**蕴含式的永真式**，因此由前面的讨论，还存在如下的推理定律：

推理定律 (II)

- $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(a) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$
- $\exists x\forall yP(x, y) \Rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$

相应的一阶逻辑系统里面，我们也有**证明**，也即所谓的演绎推理。

我们下面来介绍以一阶语言 $\mathcal{L}$ 为基础的自然推理系统 $P_{\mathcal{L}}$ ，其包括：

- 字母表即为 $\mathcal{L}$ 中的符号表 $\mathcal{G}$ 。
- 所有的合式公式即为 $\mathcal{L}$ 中的合式公式。
- 自然推理系统 P 的推理规则依旧存在。
- 没有公理规则。

关于 $P_{\mathcal{L}}$

- $P_{\mathcal{L}}$ 的头两部分构成了构造一阶公式的语法，其是定义在一阶语言 $\mathcal{L}$ 上的。
- 为了处理量词，我们需要引入新的推理规则。

我们现在来介绍量词的推理规则，令 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ 表示前提的集合。

- 全称量词消去规则 $\forall_-$

$$\frac{\Gamma}{\forall x A(x)}, \quad \frac{\Gamma}{\forall x A(x)} \quad \frac{}{\therefore A(y)}, \quad \frac{}{\therefore A(c)}$$

其中 y 是变元符号， c 是常量符号，并且 x 不出现在 $A(x)$ 中 $\exists y, \forall y$ 的辖域内。

- 全称量词引入规则 $\forall_+$

$$\frac{\Gamma}{A(y)} \quad \frac{}{\therefore \forall x A(x)}$$

其中 y 是不在 Γ 中出现的自由变元，并且我们假定 x 在 $A(y)$ 中不作约束变元出现。

- 存在量词消去规则 $\exists_-$

$$\frac{\Gamma \quad \exists x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中 c 是常量符号, $A(x)$ 除 x 外没有其他自由变元也不包含个体常项 c 。

- 存在量词引入规则 $\exists_+$

$$\frac{\Gamma \quad A(c)}{\therefore \exists x A(x)}$$

其中 c 是常量符号, c 不出现在 $A(x)$ 中。

直观上来讲，上述规则想表示的是两点：

- 全称量词要求对**所有的**都成立。
- 存在量词要求**存在**一个成立。

但由于引入了新的符号 (变量或者常量)，因此如果不仔细处理，可能会导致一些问题。

-
- 假设个体域是实数集 $\mathbb{R}$ ，考察 $A(x) \stackrel{\text{def}}{=} x > c$ ， c 是某个实数。则 $\exists x A(x)$ 是成立的，但显然 $A(c)$ 是不成立的。
 - 假设个体域是实数集 $\mathbb{R}$ ，考察 $P(y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x x > y$ ，其是成立的，但是 $\forall x P(x) = \forall x \exists x x > x$ 是不成立的。

替换的原则

能够替换的原则就在于，对于 $\forall$ 来说，我们不能使用特定的变元引入全称量词，而对于 $\exists$ 来说，我们不能用特定的常量来消去存在量词。

下述表达其实也是两个规则的等价形式：

- 存在量词消去规则 $\exists_-$

$$\frac{\Gamma \quad \exists x A(x) \quad A(y) \rightarrow B}{\therefore B}, \quad \frac{\Gamma \quad \exists x A(x) \quad A(c) \rightarrow B}{\therefore B}$$

其中 c 是常量符号, x, y 是变元符号, 并且 c 不出现、 y 不自由出现在 Γ 和 $A(x)$ 和 B 里。

- 存在量词引入规则 $\exists_+$

$$\frac{\Gamma \quad B \rightarrow A(y)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}, \quad \frac{\Gamma \quad B \rightarrow A(c)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}$$

其中 c 是常量符号, x, y 是变元符号, 并且 c 不出现、 y 不自由出现在 Γ 和 $A(x)$ 和 B 中 $\forall x, \exists x$ 的辖域里。

例 9.

下述推理错在哪？

- 由前提 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $P(x)$ 推出结论 $\forall xQ(x)$:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

前提引入

2. $P(x) \rightarrow Q(x)$

$\forall_-$

3. $P(x)$

前提引入

4. $Q(x)$

$\rightarrow$ 消去

5. $\forall xQ(x)$

$\forall_+$

考察如下的解释 $\mathfrak{J} = ((\mathbb{R}, a), \sigma)$, 其中 $a(P)(x) : x$ 是偶数, $a(Q)(x) : x$ 被 2 整除, $\sigma(x) = 2$ 。则 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $P(x)$ 都为真, 但是 $\forall xQ(x)$ 为假。

错误原因？ x 是前提出现过的自由变量！它不是任意的！

例 10.

- 由前提 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ 推出结论 $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

前提引入

2. $P(x) \rightarrow Q(x)$

$\forall_-$

3. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

前提引入

4. $Q(x) \rightarrow R(x)$

$\forall_-$

5. $P(x) \rightarrow R(x)$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$$

6. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$

$\forall_+$

例 11.

- 由前提 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ 推出结论 $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$:

- | | |
|---|-------------|
| 1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ | 前提引入 |
| 2. $P(x) \rightarrow Q(x)$ | $\forall_-$ |
| 3. $\neg P(x) \vee Q(x)$ | |
| 4. $\neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$ | |
| 5. $(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \vee Q(x)$ | |
| 6. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow Q(x)$ | |
| 7. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow R(x)$ | |
| 8. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$ | |
| 9. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$ | $\exists_+$ |
| 10. $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | 前提引入 |
| 11. $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ | $\exists_-$ |



本章总结

- 一阶逻辑的等值演算
 - 带量词的等值公式。
- 一阶逻辑的范式。
 - 前束范式、Skolem 标准形。
- 一阶逻辑推理系统。
 - 量词推理规则。