

第二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2026 年 10 月 11 日

1. 由下列真值表，分别写从成真赋值和成假赋值的角度写出以 p, q, r 为命题变元的命题公式 A, B 的两个表达式：

p	q	r	A	B
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

表 1: 命题公式 A, B 的真值表

解答. 对于 A 来说：

- 从成假赋值来写： $A = (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.
- 从成真赋值来写： $A = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

对于 B 来说：

- 从成假赋值来写： $B = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.
- 从成真赋值来写： $B = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

□

2. 求出下列命题公式的一个合取范式和析取范式。

(1) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$.

(2) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

解答. (1) 对于 $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ ，有

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \leftrightarrow r &\Leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q)) \\
 &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee (p \wedge q)) \\
 &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q).
 \end{aligned}$$

因此，一个合取范式为

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q).$$

另一方面，

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \leftrightarrow r &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg(p \wedge q) \wedge \neg r) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r). \end{aligned}$$

因此，一个析取范式为

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r).$$

(2) 对于 $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$ ，有

$$\begin{aligned} (p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r) &\Leftrightarrow \neg(p \vee (q \wedge r)) \vee (p \vee q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (p \vee q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p \vee q \vee r) \\ &\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \\ &\Leftrightarrow 1. \end{aligned}$$

因此，原公式是永真式，其一个合取范式和一个析取范式均可取为

$$p \vee \neg p.$$

这里， $p \vee \neg p$ 可以看作仅含一个析取子句的合取范式，也可以看作由两个单文字合取项组成的析取范式。

□

3. 证明关于对偶式和内否式的两个性质：

$$(1) (\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*).$$

$$(2) (\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-).$$

解答.

(1) 对 A 的联结词进行归纳：

BASE： $A = p$ ，则有 $(\neg A)^* = \neg p = \neg(A^*)$ ，即 $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$ 。

IH：假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时， A 一定如下三种情况：

(i) $A = \neg A_1$ ，则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$ ，从而：

$$(\neg A)^* \Leftrightarrow (\neg \neg A_1)^* \Leftrightarrow (A_1)^* \Leftrightarrow \neg \neg(A_1^*) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$, $(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \vee (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \vee \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \wedge A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*) \end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$, $(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \wedge (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \wedge \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \vee A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*) \end{aligned}$$

(2) 对 A 的联结词进行归纳:

BASE: $A = p$, 则有 $(\neg A)^- = p \Leftrightarrow \neg\neg p = \neg(A^-)$, 即 $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$ 。

IH: 假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时, A 一定如下三种情况:

(i) $A = \neg A_1$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$, 从而:

$$(\neg A)^- \Leftrightarrow (\neg\neg A_1)^- \Leftrightarrow (A_1)^- \Leftrightarrow \neg\neg(A_1^-) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$, $(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^- \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \wedge (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \wedge \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \vee A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-) \end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$, $(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^- \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \vee (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \vee \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \wedge A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-) \end{aligned}$$

□

4. 这一道题是关于上课提到的与非联结词 $\uparrow$:

(1) 仅使用联结词 $\uparrow$ 和命题变元, 分别写出与 $p \oplus q$ 、 $p \vee q$ 等值的公式。

(2) 一位同学认为

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow q.$$

判断这一等值式是否成立。若成立, 请给出证明; 若不成立, 请说明原因, 并写出仅使用联结词 $\uparrow$ 表示 $p \rightarrow q$ 的正确公式。

解答. (1) 我们有:

$$\begin{aligned} p \oplus q &\Leftrightarrow [p \uparrow (q \uparrow q)] \uparrow [(p \uparrow p) \uparrow q]. \\ p \vee q &\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q). \end{aligned}$$

(2) 所给等式不成立, 取 $p = 0, q = 1$, 则

$$p \rightarrow q = 1, \quad (p \uparrow p) \uparrow q = 0.$$

因此, 两者不等值。事实上我们有:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q).$$

□

5. 某大学的学生创新项目由甲、乙、丙三位评委评审。每位评委必须选择“赞成”或“反对”，不能弃权。评审规则为：当且仅当至少两位评委赞成时，项目通过评审。设命题变元 p, q, r 分别表示甲、乙、丙赞成，用命题公式 F 表示“项目通过评审”。程序员将评审规则实现为

$$G = (p \wedge q) \vee r.$$

该公式是否准确表达了评审规则？请用取真赋值或取假赋值说明理由；若不准确，请指出它会在哪种情况下作出错误判断。

解答. 公式 G 不准确。取 $(p, q, r) = (0, 0, 1)$ ，此时只有丙赞成，按评审规则项目不应通过，即 $F = 0$ 。但

$$G = (0 \wedge 0) \vee 1 = 1.$$

因此， $(0, 0, 1)$ 是 G 的取真赋值，却是 F 的取假赋值，故 G 与 F 不等值。该程序会错误地让只有丙赞成的项目通过评审。

□