线性代数 For CS　　　　Week 9

第十次作业

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 4 月 29 日

截止日期　2023 年 5 月 6 日

1. 假设现在有 4 个点：$(0,0),(8,1),(8,3),(20,4)$:

   (1) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax+b$，列出对应的方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 并给出每个点上的误差。

   (2) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，列出对应的方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 并且给出每个点上的误差。

   Remark 0.1

   中间的矩阵计算略有复杂，大家可以借助一些工具进行计算，比如有一个在线矩阵计算器的网站：https://matrix.reshish.com/zh/。关键是要能够理解最小二乘法的原理。

2. 判断下列每组向量势线性无关的，还是正交的，还是标准正交的：

   (1) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

   (2) $\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.4\\-0.3\end{bmatrix}$

   (3) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$

3. 给出下列语句的具体例子：

   (1) 一个矩阵其列向量是标准正交的，但 $QQ^T\neq I$

   (2) 两个正交的向量但是不是线性无关的。

   (3) 给出 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，其中第一个向量要求是 $\mathbf{q}_1=\sqrt{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

4. 考虑下列矩阵 Q:

$$Q=c\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

   (1) 求一个合适的 c 使得 Q 是一个正交矩阵。

   (2) 求 $\mathbf{b}=(1,1,1,1)$ 到 Q 中每一个列向量上的投影 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_4$

   (3) 求 $\mathbf{b}=(1,1,1,1)$ 到 Q 的列空间的投影 $\mathbf{p}$。

5. 证明，两个正交矩阵 Q_1,Q_2 的乘积 $Q=Q_1Q_2$ 依旧是正交矩阵.(证明 $Q^TQ=I$)