第十次作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 5 月 7 日

1. 假设现在有 4 个点：$(0,0),(8,1),(8,3),(20,4)$:
   (1) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax+b$，列出对应的方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 并给出每个点上的误差。
   (2) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，列出对应的方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 并且给出每个点上的误差。

Remark 0.1

中间的矩阵计算略有复杂，大家可以借助一些工具进行计算，比如有一个在线矩阵计算器的网站：https://matrix.reshish.com/zh/。关键是要能够理解最小二乘法的原理。

解答.

- 对应的方程为：
$$\begin{bmatrix}0&1\\8&1\\8&1\\20&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}(\text{记为}A\mathbf{x}=\mathbf{b})$$
注意到 $rank(A)=2$，从而 A^TA 是可逆的，从而我们有其最小二乘解为：
$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}=\frac{1}{51}\begin{bmatrix}10\\12\end{bmatrix}$$
即对应的线性函数为 $f(x)=\frac{10}{51}x+\frac{12}{51}$，每个点上的误差为：
$$\begin{aligned}e_1&=0-\frac{12}{51}=-\frac{12}{51}\\e_2&=1-\frac{10\cdot 8+12}{51}=-\frac{41}{51}\\e_3&=3-\frac{10\cdot 8+12}{51}=\frac{61}{51}\\e_4&=4-\frac{10\cdot 20+12}{51}=-\frac{8}{51}\end{aligned}$$

- 对应的方程为：
$$\begin{bmatrix}0&0&1\\64&8&1\\64&8&1\\400&20&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}(\text{记为}A\mathbf{x}=\mathbf{b})$$
意到 $rank(A)=3$，从而 A^TA 是可逆的，从而我们有其最小二乘解为：
$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}=\frac{1}{240}\begin{bmatrix}-1\\68\\0\end{bmatrix}$$

即对应的二次函数为 $f(x) = -\frac{1}{240}x^2 + \frac{68}{240}x$，每个点上的误差为：

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 0 \\
e_2 &= 1 - \frac{-8^2 + 68 * 8}{240} = -1 \\
e_3 &= 3 - \frac{-8^2 + 68 * 8}{240} = 1 \\
e_4 &= 4 - \frac{-20^2 + 68 * 20}{240} = 0
\end{aligned}
$$

□

2. 判断下列每组向量是线性无关的，还是正交的，还是标准正交的：

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

解答.

(1) 注意到：

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$

从而两个向量是线性无关的，另一方面：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 * (-1) + 0 * 1 = -1$$

(2) 注意到：

$$c_1 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$

从而两个向量是线性无关的，另一方面：

$$\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{bmatrix} = 0.6 * 0.4 + 0.8 * (-0.3) = 0 \quad \text{但：} \quad |\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}| \neq 1$$

从而这两个向量还是正交的，但不是标准正交的。

(3) 注意到：

$$c_1 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0\text{或}\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

从而当 $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{4}(k \in \mathbb{Z})$ 时这两个向量是线性无关的，另一方面：

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

从而当 $\theta \neq \frac{k\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$ 时这两个向量不是正交的，尽管这两个向量都是单位向量，否则其是标准正交的。

Remark 0.2

将第三个向量组中的第二个向量改为 $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$，则这两个向量是标准正交的。

$\square$

3. 给出下列语句的具体例子：

(1) 一个矩阵其列向量是标准正交的，但 $QQ^T \neq I$

(2) 两个正交的向量但是不是线性无关的。

(3) 给出 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，其中第一个向量要求是 $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

解答.

(1) 考虑矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则我们有：

$$QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

(2) 令 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$，$\mathbf{a}_2$ 为任意向量，则 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$，从而 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 是正交的，但不是线性无关的。

(3) 考虑方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad 即 x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

的解，我们有：

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是其一组基。从而 $\mathbf{q}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，再利用 Gram-Schmidt 正交化方法，我们有：

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{s}_1 - \frac{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T}{\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1}\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{s}_2 - \frac{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T}{\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1}\mathbf{s}_2 - \frac{\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T}{\mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_2}\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

将其单位化即得到了一组标准正交基：

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

□

Remark 0.3

第三问原来给的 $\mathbf{q}_1$ 有误，应该是 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 而不是 $\sqrt{3}$，否则其不是单位向量。这里也要特别感谢一位同学的指出。

4. 考虑下列矩阵 Q:

$$Q = c\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1 & -1\\-1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求一个合适的 c 使得 Q 是一个正交矩阵。
(2) 求 $\mathbf{b} = (1,1,1,1)$ 到 Q 中每一个列向量上的投影 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_4$
(3) 求 $\mathbf{b} = (1,1,1,1)$ 到 Q 的列空间的投影 $\mathbf{p}$。

解答.

(1) 我们有：

$$Q^TQ = c^2\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

从而 $c^2 = \frac{1}{4}$，即令 $c = \pm\frac{1}{2}$，Q 是一个正交矩阵。

(2) 若 $c = 0$，则我们有 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$，否则记 $\frac{1}{c}Q$ 的列向量分别为 $\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_4$，我们有：

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_4 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_4\mathbf{q}_4^T\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

(3) 若 $c=0$ 则我们有 $\mathbf{p}=\mathbf{0}$，否则注意到 Q 的列向量都是正交的，所以我们有:

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

另一个解释在于 $\mathbf{b}\in C(Q)$。

□

5. 证明，两个正交矩阵 Q_1, Q_2 的乘积 $Q=Q_1Q_2$ 依旧是正交矩阵.(证明 $Q^TQ=I$)

解答. 我们有:

$$(Q_1Q_2)^TQ_1Q_2=Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2=Q_2^T(Q_1^TQ_1)Q_2=Q_2^TQ_2=I$$

□