线性代数 For EI　　　　Week 10

第十次作业

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 4 月 29 日

截止日期　2023 年 5 月 6 日

1. 计算下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2. 假设 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式值为 6，请计算 $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式的值，其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

3. 判断下列语句是否正确，如果错误的话请给出反例：

   (1) 如果 A 不可逆，则 AB 不可逆。

   (2) $A - B$ 的行列式值为 $\det(A) - \det(B)$.

   (3) AB 和 BA 具有相同的行列式值。

4. 定义 *Hilbert* 矩阵为：$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$，即 $H_n(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$，请写出 H_2, H_3 并写出其行列式的值。

   Remark 0.1

   Hilbert 矩阵是一种常见的难计算的矩阵，常用来测试算法。

5. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

   (hint: 利用列交换变成三角矩阵试试。)

Remark 0.2

这其实也说明，类似这样的反对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 n 不同的时候其答案形式是不一样的。

6. 利用 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 说明对分块对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$，证明 $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)$。

(hint: 分 A_1 是可逆矩阵和不可逆矩阵两种情况进行讨论。)