第十次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 5 月 7 日

1. 计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解答.

(1) 注意到:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$$

(2) 注意到:

$$\begin{bmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -y \\ 1 & x-y & -x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -y \\ 1 & 1-\frac{y}{x} & -x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & y-x-\frac{y^2}{x} \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & y-x-\frac{y^2}{x} \end{vmatrix} = 2x(x+y)(y-x-\frac{y^2}{x}) = -2x^3-2y^3$$

(3) 注意到:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 40 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 40 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160$$

□

Remark 0.1

其实后续可以看到，中间使用行变换也是可以的，但为了契合进度，这一题的解题过程中全部使用了列变换，因此并不是最简单的计算方式。

2. 假设 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式值为 6，请计算 $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式的值，其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

解答. 利用行列式的性质，我们有：

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1) \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 4\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 2\mathbf{a}_2) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 2\mathbf{a}_2) + \\ &\det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 3\mathbf{a}_1) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1) \\ &= -4\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= -4 \cdot 6 = -24 \end{aligned}$$

□

3. 判断下列语句是否正确，如果错误的话请给出反例：

(1) 如果 A 不可逆，则 AB 不可逆。
(2) $A - B$ 的行列式值为 $\det(A) - \det(B)$.
(3) AB 和 BA 具有相同的行列式值。

解答.

(1) 正确。因为如果 A 不可逆，则 $\det(A) = 0$，从而 $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$，即 AB 不可逆。

(2) 错误。反例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\det(A - B) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \neq 1 - 1 = \det(A) - \det(B)$.

(3) 错误，原因在于 A, B 可能本身不是方阵，如令：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则我们有：$\det(AB) = 0$，$\det(BA) = 1$

□

Remark 0.2

第一个也有不用行列式的方式，否则反设 AB 可逆，则我们有：

$$I = AB(AB)^{-1} = A(B(AB)^{-1})$$

从而 A 可逆，矛盾。但是从严格证明的角度讲，还是需要用这一种不用行列式的方法。

4. 定义 *Hilbert* 矩阵为：$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$，即 $H_n(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$，请写出 H_2, H_3 并写出其行列式的值。

Remark 0.3

Hilbert 矩阵是一种常见的难计算的矩阵，常用来测试算法。

解答. 写出 H_2, H_3 可得：

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

其行列式值为：

$$\det(H_2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},\ \det(H_3) = \frac{1}{2160}$$

□

5. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(hint: 利用列交换变成三角矩阵试试。)

Remark 0.4

这其实也说明，类似这样的反对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 n 不同的时候其答案形式是不一样的。

解答. 我们对其进行行列变换，将第 n 列依次与第 $n-1, n-2, \cdots 1$ 列交换（共 $n-1$ 次列交换），得到：

$$\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

继续将最后一列依次与第 $n-1, n-2, \cdots 2$ 列交换（共 $n-2$ 次列交换），得到：

$$\begin{bmatrix} a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} \\ a_{2,n-1} & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-2} \\ 0 & 0 & a_{31} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

继续进行这个过程，最终通过 $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 次列交换，矩阵可以变换成如下的形式：

$$\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ 0 & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ 0 & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

□

6. 利用 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 说明对分块对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$,证明 $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)$。

(hint: 分 A_1 是可逆矩阵和不可逆矩阵两种情况进行讨论。)

解答. 注意到

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) \det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix})$$

下证：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(A_1),\ \det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = \det(A_2)$$

不妨可以假设 A_1, A_2 都是可逆矩阵，否则我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = 0$$

由于 A_1 是可逆矩阵，从而存在一系列的初等矩阵 $E_1, \ldots E_k$, 使得：

$$A_1 = E_1 \cdots E_k$$

从而我们有：

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} E_k & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

另一方面，我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} E_i & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(E_i)$$

从而我们有:

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) = \det(A_1)$$

同理，我们有:

$$\det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = \det(A_2)$$

□