

第十一次作业

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 5 月 6 日

截止日期 2023 年 5 月 13 日

Remark 0.1

本次作业会包含 5.10 日课程的内容，若提前做碰到困难的话可以看一下后面的课件。

1. 通过 *Gram-Schmidt* 正交化得到下列向量张成空间的对应标准正交基：

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. 求出下列矩阵的 *QR* 分解：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(hint: 先通过 *Gram-Schmidt* 正交化得到一组标准正交的向量)

3. 假设 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ 的行列式值为 6，请计算 $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$ 的行列式的值，其中：

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{b}_3 = 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1$$

4. 计算下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x+y & y & x \\ x & x+y & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

5. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

6. 请指出下列语句的错误。

(1) 对投影矩阵 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 计算行列式有：

$$\det(P) = \det(A) \det(A^T A)^{-1} \det(A^T) = \frac{\det(A) \det(A^T)}{\det(A^T A)} = \frac{\det(A) \det(A^T)}{\det(A) \det(A^T)} = 1$$

(2) 如果 $AB = -BA$ ，则我们有 $\det(A) \det(B) = -\det(B) \det(A)$ ，即 $\det(A) \det(B) = 0$ ，从而 A, B 两个矩阵必有一个不可逆。

