第十一次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 5 月 14 日

1. 通过 $Gram-Schmidt$ 正交化得到下列向量张成空间的对应标准正交基:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$$

解答. 我们先得到一组正交基 $\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_3$:

(1) $\mathbf{q}_1=\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

(2) $\mathbf{q}_2=\mathbf{b}-\frac{\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}}{\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}}\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$.

(3) $\mathbf{q}_3=\mathbf{c}-\frac{\mathbf{q}_1^T\mathbf{c}}{\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1}\mathbf{q}_1-\frac{\mathbf{q}_2^T\mathbf{c}}{\mathbf{q}_2^T\mathbf{q}_2}\mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{4}{5}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{10}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}$.

最后将 $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ 单位化便得到了一组标准正交基:

$$\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix},\quad \frac{\sqrt{30}}{30}\begin{bmatrix}-5\\1\\2\end{bmatrix}$$

□

2. 求出下列矩阵的 QR 分解:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&3\\0&3&6\end{bmatrix}$$

(hint: 先通过 $Gram-Schmidt$ 正交化得到一组标准正交的向量)

解答. 我们将其列向量 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}$ 进行 $Gram-Schmidt$ 正交化:

- $\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

- $\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T}{\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T}{\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T}{\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

并将其单位化可得一组标准正交基：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们可以得到其 QR 分解：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

□

3. 假设 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式值为 6，请计算 $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$ 的行列式的值，其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

解答. 利用行列式的性质，我们有：

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1) \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 4\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 2\mathbf{a}_2) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 2\mathbf{a}_2) + \\ &\det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, 3\mathbf{a}_1) + \det(\mathbf{a}_2, 5\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1) \\ &= -4\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= -4 \cdot 6 = -24 \end{aligned}$$

□

4. 计算下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x+y & y & x \\ x & x+y & y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解答.

(1) 注意到：

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\3&5&-3\\0&1&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\3&5&0\\0&1&\frac{23}{5}\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&5&0\\0&1&\frac{23}{5}\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot\frac{23}{5}=23$$

(2) 注意到：

$$\begin{bmatrix}y&x&x+y\\x+y&y&x\\x&x+y&y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2(x+y)&x&x+y\\2(x+y)&y&x\\2(x+y)&x+y&y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&x&x+y\\1&y&x\\1&x+y&y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\1&y-x&-y\\1&y&-x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-y\\1&\frac{y}{y-x}&-x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&\frac{y}{y-x}&-x+\frac{y^2}{y-x}\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=2(x+y)\cdot(y-x)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&\frac{y}{y-x}&-x+\frac{y^2}{y-x}\end{vmatrix}=2(x+y)(y-x)(-x+\frac{y^2}{y-x})=2x^3+2y^3$$

(3) 注意到：

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&-1&-2&-7\\3&-2&-8&-10\\4&-7&-10&-13\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\3&-2&-4&4\\4&-7&4&36\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\3&-2&-4&0\\4&-7&4&40\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\3&-2&-4&0\\4&-7&4&40\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot40=160$$

□

Remark 0.1

其实后续可以看到，中间使用行变换也是可以的，但为了契合进度，这一题的解题过程中全部使用了列变换，因此并不是最简单的计算方式。

5. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

Remark 0.2

这其实也说明，类似这样的反对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 n 不同的时候其答案形式是不一样的。

解答. 我们对其进行列变换，将第 n 列依次与第 $n-1, n-2, \cdots 1$ 列交换（共 $n-1$ 次列交换），得到：

$$\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

继续将最后一列依次与第 $n-1, n-2, \cdots 2$ 列交换（共 $n-2$ 次列交换），得到：

$$\begin{bmatrix} a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} \\ a_{2,n-1} & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-2} \\ 0 & 0 & a_{31} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

继续进行这个过程，最终通过 $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 次列交换，矩阵可以变换成如下的形式：

$$\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ 0 & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ 0 & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

□

6. 请指出下列语句的错误。

(1) 对投影矩阵 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 计算行列式有：

$$\det(P) = \det(A)\det(A^TA)^{-1}\det(A^T) = \frac{\det(A)\det(A^T)}{\det(A^TA)} = \frac{\det(A)\det(A^T)}{\det(A)\det(A^T)} = 1$$

(2) 如果 $AB = -BA$，则我们有 $\det(A)\det(B) = -\det(B)\det(A)$，即 $\det(A)\det(B) = 0$，从而 A, B 两个矩阵必有一个不可逆。

解答.

(1) A^T 和 A 不一定是方阵，从而尽管我们有：

$$\det(A^T A) = \frac{1}{\det(A^T A)^{-1}}$$

但是，不能进一步拆分成 $\det(A)\det(A^T)$。

(2)

$$\det(-A) \neq -\det(A)$$

□

Remark 0.3

在第二问中，由于 $AB = -BA$，所以 A, B 一定都是方阵。所以不能利用第一问错的原因。