第十一次作业

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 5 月 6 日

截止日期　2023 年 5 月 13 日

Remark 0.1

本次作业会包含 5.11 日课程的部分内容，若提前做碰到困难的话可以看一下后面的课件。

1. 请指出下列语句的错误。

   (1) 对投影矩阵 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 计算行列式有：

   $$\det(P) = \det(A)\det(A^TA)^{-1}\det(A^T) = \frac{\det(A)\det(A^T)}{\det(A^TA)} = \frac{\det(A)\det(A^T)}{\det(A)\det(A^T)} = 1$$

   (2) 如果 $AB = -BA$，则我们有 $\det(A)\det(B) = -\det(B)\det(A)$，即 $\det(A)\det(B) = 0$，从而 A, B 两个矩阵必有一个不可逆。

2. 通过 $Cramers'\ Rule$ 解下列两个方程组：

   $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} ax + by + cz &= 1 \\ dx + ey + fz &= 0 \\ gx + hy + iz &= 0 \end{aligned}$$

3. 利用行列式的定义 (Big Formula) 计算下列行列式

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4. 计算下列行列式，并由 $\det(G_2), \det(G_3), \det(G_4)$ 猜测 $\det(G_n)$：

   $$G_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

5. 利用 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$ 来说明，1 到 n 的所有置换中，奇偶置换的个数相等，这里再回顾一下，奇置换是指其逆序数为奇数的置换，偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

6. 上次作业中，我们证明了

   $$\det(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = \det(A)\det(B)$$

- 进一步证明：

$$\det(\begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}) = \det(A)\det(B)$$

- 请给出一个例子说明：

$$\det(\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}) \neq \det(A)\det(B) - \det(D)\det(C)$$

这一结论说明，对分块矩阵的行列式运算，并不像分块矩阵的乘法那般自然。