第十一次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 5 月 14 日

1. 请指出下列语句的错误。

(1) 对投影矩阵 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 计算行列式有：

$$\det(P) = \det(A)\det(A^TA)^{-1}\det(A^T) = \frac{\det(A)\det(A^T)}{\det(A^TA)} = \frac{\det(A)\det(A^T)}{\det(A)\det(A^T)} = 1$$

(2) 如果 $AB = -BA$，则我们有 $\det(A)\det(B) = -\det(B)\det(A)$，即 $\det(A)\det(B) = 0$，从而 A, B 两个矩阵必有一个不可逆。

解答.

(1) A^T 和 A 不一定是方阵，从而尽管我们有：

$$\det(A^TA) = \frac{1}{\det(A^TA)^{-1}}$$

但是，不能进一步拆分成 $\det(A)\det(A^T)$。

(2)

$$\det(-A) \neq -\det(A)$$

□

Remark 0.1

在第二问中，由于 $AB = -BA$，所以 A, B 一定都是方阵。所以不能利用第一问错的原因。

2. 通过 $Cramers'\ Rule$ 解下列两个方程组：

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} ax + by + cz &= 1 \\ dx + ey + fz &= 0 \\ gx + hy + iz &= 0 \end{aligned}$$

解答.

(1) 记：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

分别计算行列式可得：

$$\det(A) = -6, \quad \det(A_1) = 0, \quad \det(A_2) = -6, \quad \det(A_3) = 0$$

从而该方程的解为：

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 0, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 1, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 0$$

(2) 记:

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\ A_1=\begin{bmatrix}1&b&c\\0&e&f\\0&h&i\end{bmatrix}\ A_2=\begin{bmatrix}a&1&c\\d&0&f\\g&0&i\end{bmatrix}\ A_3=\begin{bmatrix}a&b&1\\d&e&0\\g&h&0\end{bmatrix}$$

分别计算行列式可得:

$$\det(A)=aei+bfg+cdh-cge-bdi-afh,\quad \det(A_1)=ei-fh,\quad \det(A_2)=fg-di,\quad \det(A_3)=dh-eg$$

若 $\det(A)\neq 0$。则该方程的解为:

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{ei-fh}{aei+bfg+cdh-cge-bdi-afh},$$
$$y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{fg-di}{aei+bfg+cdh-cge-bdi-afh},$$
$$z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{dh-eg}{aei+bfg+cdh-cge-bdi-afh}$$

若 $\det(A)=0$. 则该方程组可能有无数解或者无解。

□

3. 利用行列式的定义 (Big Formula) 计算下列行列式

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&4&5\\7&8&9\end{bmatrix}$$

解答. 注意到 123 的置换一共有 $3!=6$ 种，分别为 $123,132,213,231,312,321$，并且其中有 3 个奇置换和 3 个偶置换，从而:

$$\begin{aligned}\det(A)&=1\cdot4\cdot9+2\cdot5\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot4\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot5\cdot8\\&=36+70+96-84-72-40=6\end{aligned}$$

□

4. 计算下列行列式，并由 $\det(G_2),\det(G_3),\det(G_4)$ 猜测 $\det(G_n)$:

$$G_2=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\quad G_3=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix},\quad G_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

解答. 计算可得:

$$\det(G_2)=-1,\quad \det(G_3)=2,\quad \det(G_4)=-3$$

从而猜测 $\det(G_n)=(-1)^{n-1}(n-1)$。注意到:

$$\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\n-1&0&1&\cdots&1\\n-1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n-1&1&1&\cdots&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1\end{bmatrix}$$

上述的第二步是将后面 $n-1$ 列都加到第一列上，第四步是将第一列的 (-1) 倍分别加到后面的 $n-1$ 列上。从而我们有：

$$\det(G_n)=(n-1)\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

□

5. 利用 $\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$ 来说明，1 到 n 的所有置换中，奇偶置换的个数相等，这里再回顾一下，奇置换是指其逆序数为奇数的置换，偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

解答. 注意到，由行列式的定义，我们有：

$$\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}$$

当 σ 为奇置换时，$\tau(\sigma)$ 为奇数，从而 $(-1)^{\tau(\sigma)}=-1$；当 σ 为偶置换时，$\tau(\sigma)$ 为偶数，从而 $(-1)^{\tau(\sigma)}=1$。注意到上述行列式为 0，从而奇置换和偶置换的个数相等。□

6. 上次作业中，我们证明了

$$\det(\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix})=\det(A)\det(B)$$

- 进一步证明：

$$\det(\begin{bmatrix}A&D\\O&B\end{bmatrix})=\det(A)\det(B)$$

- 请给出一个例子说明：

$$\det(\begin{bmatrix}A&D\\C&B\end{bmatrix})\neq\det(A)\det(B)-\det(D)\det(C)$$

这一结论说明，对分块矩阵的行列式运算，并不像分块矩阵的乘法那般自然。

解答. 这次我们用行列式的定义来证明，记 $H=\begin{bmatrix}A&D\\O&B\end{bmatrix}$，令其第 i 行第 j 列的元素为 h_{ij}。注意到：

$$\begin{vmatrix}A&D\\O&B\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}h_{i,\sigma(i)}$$

考察 $\prod_{i=1}^{n}h_{i,\sigma(i)}$，如果其存在 D 中的元素，则其也必然存在 O 中的元素，从而其必然为 0。从而我们有：

$$\begin{vmatrix}A&D\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\det(A)\det(B)$$

特别的，令：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = -1, \ \det(A)\det(B) - \det(D)\det(C) = 0 - 0 = 0$$

$\square$

Remark 0.2

事实上，注意到如果 A 是可逆的，利用如下的分块矩阵的消元法：

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ O & B - CA^{-1}D \end{bmatrix}$$

从而如果 $AC = CA$，我们进一步有：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & D \\ O & B - CA^{-1}D \end{vmatrix} \\ &= \det(A)\det(B - CA^{-1}D) \\ &= \det(A(B - CA^{-1}D)) \\ &= \det(AB - ACA^{-1}D) \\ &= \det(AB - CAA^{-1}D) = \det(AB - CD) \end{aligned}$$