第十二次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 5 月 13 日

截止日期　2023 年 5 月 20 日

1. 通过 $Cramers'\ Rule$ 解下列两个方程组：

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=2 \\ x_1+2x_2+3x_3&=4 \\ 3x_1+3x_2+4x_3&=6 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} ax+by+cz&=1 \\ dx+ey+fz&=0 \\ gx+hy+iz&=0 \end{aligned}$$

2. 利用行列式的定义 (Big Formula) 计算下列行列式

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

3. 计算下列行列式，并由 $\det(G_2),\det(G_3),\det(G_4)$ 猜测 $\det(G_n)$ 并验证：

$$G_2=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\quad G_3=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix},\quad G_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

4. 利用 $\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$ 来说明，1 到 n 的所有置换中，奇偶置换的个数相等，这里奇置换是指其逆序数为奇数的置换，偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

5. 我们来考虑一下分块矩阵的行列式计算，假设 A,B,C,D 都是方阵：

   (1) 证明 $\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\det(A)\det(B)$。

   (2) 进一步证明 $\begin{vmatrix}A&D\\O&B\end{vmatrix}=\det(A)\det(B)$。

   (3) 请分别给出例子说明 $\begin{vmatrix}A&D\\C&B\end{vmatrix}\neq\det(A)\det(B)-\det(C)\det(D)$ 以及 $\begin{vmatrix}A&D\\C&B\end{vmatrix}\neq\det(AB-CD)$。

Remark 0.1

事实上，我们可以证明，当 A 可逆并且 $AC=CA$ 时，

$$\begin{vmatrix}A&D\\C&B\end{vmatrix}=\det(AB-CD)$$