线性代数 For CS　　　　Week 12

第十二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 5 月 24 日

1. 通过 $Cramers'\ Rule$ 解下列两个方程组：

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} ax + by + cz &= 1 \\ dx + ey + fz &= 0 \\ gx + hy + iz &= 0 \end{aligned}$$

解答.

(1) 记：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

分别计算行列式可得：

$$\det(A) = -6, \quad \det(A_1) = 0, \quad \det(A_2) = -12, \quad \det(A_3) = 0$$

从而该方程的解为：

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 0, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 0$$

(2) 记：

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{bmatrix}$$

分别计算行列式可得：

$$\det(A) = aei+bfg+cdh-cge-bdi-afh, \quad \det(A_1) = ei-fh, \quad \det(A_2) = fg-di, \quad \det(A_3) = dh-eg$$

若 $\det(A) \neq 0$。则该方程的解为：

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{ei - fh}{aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh}, \\ y &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{fg - di}{aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh}, \\ z &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{dh - eg}{aei + bfg + cdh - cge - bdi - afh} \end{aligned}$$

若 $\det(A) = 0$. 则该方程组可能有无数解或者无解。

□

2. 利用行列式的定义 (Big Formula) 计算下列行列式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

解答. 注意到 123 的置换一共有 $3! = 6$ 种，分别为 $123, 132, 213, 231, 312, 321$，并且其中有 3 个奇置换和 3 个偶置换，从而：

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0 \end{aligned}$$

□

3. 计算下列行列式，并由 $\det(G_2), \det(G_3), \det(G_4)$ 猜测 $\det(G_n)$ 并验证：

$$G_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解答. 计算可得：

$$\det(G_2) = -1, \quad \det(G_3) = 2, \quad \det(G_4) = -3$$

从而猜测 $\det(G_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$。注意到：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

上述的第二步是将后面 $n-1$ 列都加到第一列上，第四步是将第一列的 (-1) 倍分别加到后面的 $n-1$ 列上。从而我们有：

$$\det(G_n) = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

□

4. 利用 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$ 来说明，1 到 n 的所有置换中，奇偶置换的个数相等，这里奇置换是指其逆序数为奇数的置换，偶置换是指其逆序数为偶数的置换。

解答. 注意到，由行列式的定义，我们有：

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{\tau(\sigma)}$$

当 σ 为奇置换时，$\tau(\sigma)$ 为奇数，从而 $(-1)^{\tau(\sigma)} = -1$；当 σ 为偶置换时，$\tau(\sigma)$ 为偶数，从而 $(-1)^{\tau(\sigma)} = 1$。注意到上述行列式为 0，从而奇置换和偶置换的个数相等。 □

5. 我们来考虑一下分块矩阵的行列式计算，假设 A, B, C, D 都是方阵：

(1) 证明 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$。

(2) 进一步证明 $\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$。

(3) 请分别给出例子说明 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq \det(A)\det(B) - \det(C)\det(D)$ 以及 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq \det(AB - CD)$。

Remark 0.1

事实上，我们可以证明，当 A 可逆并且 $AC = CA$ 时，

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = \det(AB - CD)$$

解答.

- 注意到

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) \det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix})$$

下证：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(A_1), \ \det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = \det(A_2)$$

不妨可以假设 A_1, A_2 都是可逆矩阵，否则我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = 0$$

由于 A_1 是可逆矩阵，从而存在一系列的初等矩阵 $E_1, \dots E_k$，使得：

$$A_1 = E_1 \cdots E_k$$

从而我们有：

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} E_k & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

另一方面，我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} E_i & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(E_i)$$

从而我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & I \end{bmatrix}) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) = \det(A_1)$$

同理，我们有：

$$\det(\begin{bmatrix} I & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}) = \det(A_2)$$

- 我们用行列式的定义来证明，记 $H = \begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}$，令其第 i 行第 j 列的元素为 h_{ij}。注意到：

  $$\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}$$

  考察 $\prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}$，如果其存在 D 中的元素，则其也必然存在 O 中的元素，从而其必然为 0。从而我们有：

  $$\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

- 令：

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  我们有：

  $$\det(\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 0 - 1 = -1$$

  $$\det(A)\det(B) - \det(D)\det(C) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0$$

  $$\det(AB - CD) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = 0$$

□