

第十二次作业

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 5 月 13 日

截止日期 2023 年 5 月 20 日

Remark 0.1

本次作业会包含 5.17 日课程的部分内容，若提前做碰到困难的话可以看一下后面的课件。

1. 分别利用 *Cramer* 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 计算下列矩阵 A 和 A^2 的特征值和特征向量：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

3. 定义下列数列：

$$G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k), \quad G_0 = 1, \quad G_1 = 1$$

(1) 将其写成 $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$ 的矩阵形式。

(2) 求矩阵 A 的特征值和特征向量。

(3) 求 A 的对角化 $X\Lambda X^{-1}$ 。

(4) 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \frac{2}{3}$

4. 对下列给定的矩阵，计算 A^n 和 B^n ：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

5. 令 A 是 $n \times n$ 的矩阵，证明 A^T 和 A 的特征值相同。

6. 令 $A = X\Lambda X^{-1}$ 。对角化下列矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & 2A \end{bmatrix}$$

并给出 B 的特征值和特征向量。

