第十二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 5 月 24 日

1. 分别利用 $Cramer$ 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&7&1\end{bmatrix}$$

解答.

- (利用 $Cramer$ 法则) 首先计算 A 的行列式:

$$|A|=1\cdot 3\cdot 1=3$$

再分别计算 A 的代数余子式:

$$\begin{aligned}
&C_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3&0\\7&1\end{vmatrix}=3, &&C_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0, &&C_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&3\\0&7\end{vmatrix}=0\\
&C_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&0\\7&1\end{vmatrix}=-2, &&C_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1, &&C_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\0&7\end{vmatrix}=-7\\
&C_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}=0, &&C_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0, &&C_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3
\end{aligned}$$

从而 A 的逆矩阵为:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}C_{11}&C_{21}&C_{31}\\C_{12}&C_{22}&C_{32}\\C_{13}&C_{23}&C_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&-2&0\\0&1&0\\0&-7&3\end{bmatrix}$$

- (初等变换) 注意到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}A&I\end{bmatrix}&\implies\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\0&7&1&0&0&1\end{bmatrix}\implies\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&7&1&0&0&1\end{bmatrix}\\
&\implies\begin{bmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&0&-\frac{7}{3}&1\end{bmatrix}\implies\begin{bmatrix}1&0&0&1&-\frac{2}{3}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&0&-\frac{7}{3}&1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

从而 A 的逆矩阵为:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{2}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&-\frac{7}{3}&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&-2&0\\0&1&0\\0&-7&3\end{bmatrix}$$

□

2. 计算下列矩阵 A 和 A^2 的特征值和特征向量：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix}7 & -3\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

解答. 首先计算 A 的特征多项式：

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3)$$

从而其两个特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$。

(1) 对于 $\lambda_1=2$，解方程组 $(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\ \text{的一组解为：}\ \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量。

(2) 对于 $\lambda_2=-3$，解方程组 $(A+3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\ \text{的一组解为：}\ \begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_2=-3$ 对应的特征向量。对于 A^2，同理计算其特征多项式：

$$f_{A^2}(\lambda)=\det(A^2-\lambda I)=\begin{vmatrix}7-\lambda & -3\\ -2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-13\lambda+36=(\lambda-4)(\lambda-9)$$

从而其两个特征值为 $\lambda_1=4,\ \lambda_2=9$。

(i) 对于 $\lambda_1=4$，解方程组 $(A^2-4I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\ \text{的一组解为：}\ \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_1=4$ 对应的特征向量。

(ii) 对于 $\lambda_2=9$，解方程组 $(A^2-9I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\ \text{的一组解为：}\ \begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_2=9$ 对应的特征向量。

□

Remark 0.1

我们可以从其对角化意识到：

$$A=X\Lambda X^{-1},\ A^2=X\Lambda^2X^{-1}$$

从而 A^2 的特征值是 A 的特征值的平方，其特征向量是不变的。

3. 定义下列数列：

$$G_{k+2}=\frac{1}{2}(G_{k+1}+G_k),\ G_0=0,\ G_1=1$$

(1) 将其写成 $\begin{bmatrix}G_{k+2}\\G_{k+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}G_{k+1}\\G_k\end{bmatrix}$ 的矩阵形式。

(2) 求矩阵 A 的特征值和特征向量。

(3) 求 A 的对角化 $X\Lambda X^{-1}$.

(4) 证明 $\lim_{k\to\infty}G_k=\frac{2}{3}$

解答.

(1)

$$\begin{bmatrix}G_{k+2}\\G_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_{k+1}\\G_k\end{bmatrix}$$

(2) 计算矩阵 A 的特征多项式：

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\lambda&\frac{1}{2}\\1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})$$

从而其两个特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-\frac{1}{2}$。

- 对于 $\lambda_1=1$，解方程组 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\text{ 的一组解为：}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量。

- 对于 $\lambda_2=-\frac{1}{2}$，解方程组 $(A+\frac{1}{2}I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\text{ 的一组解为：}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

即为 $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ 对应的特征向量。

(3) 由上题结论，令：

$$X=\begin{bmatrix}1&1\\1&-2\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

则我们有：

$$AX=X\Lambda\text{ 即：}A=X\Lambda X^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

(4) 注意到：

$$A^k=X\Lambda^kX^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&(-\frac{1}{2})^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k&\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k\\\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1}&\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1}\end{bmatrix}$$

以及：

$$\begin{bmatrix}G_k\\G_{k-1}\end{bmatrix}=A^{k-1}\begin{bmatrix}G_1\\G_0\end{bmatrix}$$

从而：

$$G_k = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1})G_1 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1})G_0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1}$$

也就是：

$$\lim_{k\to\infty} G_k = \frac{2}{3}$$

□

Remark 0.2

非常抱歉，这里一开始不小心把初值 G_0 写成了 1，这会导致所有的 G_i 都是 1，尽管依旧可以依照上述方法解出来，但是这样会导致最后 G_k 恰好算出来是 1(在最后一个式子中，令 $G_1 = G_0 = 1$ 可计算出 $G_k = 1$)，从而导致第四问结论有问题。现在答案中改正并给出正确的版本。

4. 对下列给定的矩阵，计算 A^n 和 B^n：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

解答.

(1) 注意到：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 计算 B 的特征多项式：

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 + 28\lambda + 24 = (\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

- 对于 $\lambda_1 = 2$，解方程组 $(B - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为：} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 对于 $\lambda_2 = 6$，解方程组 $(B - 6I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$：

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为：} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

即：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

从而：

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2^n & -2^n & 6^n \\ 0 & 2^n & -2 \cdot 6^n \\ 2^n & 0 & 3 \cdot 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \cdot 2^n - 6^n & 2^{n+1} - 6^n & -2^n + 6^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 6^n & 2^{n+1} + 2 \cdot 6^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 6^n \\ 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 6^n & 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 6^n & 2^n + 3 \cdot 6^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

5. 令 A 是 $n \times n$ 的矩阵，证明 A^T 和 A 的特征值相同。

解答. 注意到：

$$(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$$

从而我们有：

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I)$$

从而 A 和 A^T 的特征值相同。 □

6. 令 $A = X \Lambda X^{-1}$。对角化下列矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & 2A \end{bmatrix}$$

并给出 B 的特征值和特征向量。

解答. 注意到：

$$B = X(2\Lambda)X^{-1}$$

从而我们有：

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & O \\ O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & 2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & O \\ O & X^{-1} \end{bmatrix}$$

令 $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$，$\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，则我们有：

- B 的特征值为 $\lambda_1, 2\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 2\lambda_n$。

- 对应的特征向量为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

□