第十三次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 5 月 24 日

截止日期　2023 年 5 月 27 日

Remark 0.1

本次作业会包含 5.24 日课程的部分内容，若提前做碰到困难的话可以看一下后面的课件。

1. 计算下列矩阵的行列式：

$$\begin{bmatrix} 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

2. 分别利用 $Cramer$ 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 计算下列矩阵 A 和 A^2 的特征值和特征向量：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \; A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

4. 定义下列数列：

$$G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k), \; G_0 = 0, \; G_1 = 1$$

(1) 将其写成 $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$ 的矩阵形式。

(2) 求矩阵 A 的特征值和特征向量。

(3) 求 A 的对角化 $X\Lambda X^{-1}$.

(4) 证明 $\lim_{k\to\infty} G_k = \frac{2}{3}$

Remark 0.2

这道题一开始的版本给了个错误的初始值，应该是 $G_0 = 0$，而不是 $G_0 = 1$

5. 对下列给定的矩阵，计算 A^n 和 B^n：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

6. 令 A 是 $n \times n$ 的矩阵，证明 A^T 和 A 的特征值相同。