

## 第十三次作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 5 月 26 日

1. 计算下列矩阵的行列式:

$$\begin{bmatrix} 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

解答. 对上述矩阵作初等变换为:

$$\begin{bmatrix} 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+a+\frac{a}{b} & -a & -a & -a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+a+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d} & -a & -a & -a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

从而:

$$\begin{vmatrix} 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d} & -a & -a & -a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = bcd(1+a+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}) = abcd+bcd+acd+abd+abc$$

□

2. 分别利用 *Cramer* 法则和初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

解答.

- (利用 *Cramer* 法则) 首先计算  $A$  的行列式:

$$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$$

再分别计算  $A$  的代数余子式:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3, & C_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, & C_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ C_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -2, & C_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & C_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \\ C_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, & C_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & C_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \end{aligned}$$

从而  $A$  的逆矩阵为:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

• (初等变换) 注意到:

$$\begin{aligned} [A \ I] &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而  $A$  的逆矩阵为:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

□

3. 计算下列矩阵  $A$  和  $A^2$  的特征值和特征向量:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

**解答.** 首先计算  $A$  的特征多项式:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

从而其两个特征值为  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -3$ 。

(1) 对于  $\lambda_1 = 2$ , 解方程组  $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

即为  $\lambda_1 = 2$  对应的特征向量。

(2) 对于  $\lambda_2 = -3$ , 解方程组  $(A + 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

即为  $\lambda_2 = -3$  对应的特征向量。对于  $A^2$ , 同理计算其特征多项式:

$$f_{A^2}(\lambda) = \det(A^2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

从而其两个特征值为  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 9$ 。

(i) 对于  $\lambda_1 = 4$ , 解方程组  $(A^2 - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

即为  $\lambda_1 = 4$  对应的特征向量。

(ii) 对于  $\lambda_2 = 9$ , 解方程组  $(A^2 - 9I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

即为  $\lambda_2 = 9$  对应的特征向量。

□

4. 定义下列数列:

$$G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k), \quad G_0 = 0, \quad G_1 = 1$$

(1) 将其写成  $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$  的矩阵形式。

(2) 求矩阵  $A$  的特征值和特征向量。

(3) 求  $A$  的对角化  $X\Lambda X^{-1}$ .

(4) 证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \frac{2}{3}$

**解答.**

(1)

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$$

(2) 计算矩阵  $A$  的特征多项式:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})$$

从而其两个特征值为  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ 。

• 对于  $\lambda_1 = 1$ , 解方程组  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即为  $\lambda_1 = 1$  对应的特征向量。

• 对于  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ , 解方程组  $(A + \frac{1}{2}I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

即为  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  对应的特征向量。

(3) 由上题结论, 令:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$AX = X\Lambda \text{ 即: } A = X\Lambda X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(4) 注意到:

$$A^k = X\Lambda^k X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1} \end{bmatrix}$$

以及:

$$\begin{bmatrix} G_k \\ G_{k-1} \end{bmatrix} = A^{k-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix}$$

从而:

$$G_k = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1})G_1 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k)G_0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1}$$

也就是:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \frac{2}{3}$$

□

5. 对下列给定的矩阵, 计算  $A^n$  和  $B^n$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

**解答.**

(1) 注意到:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 计算  $B$  的特征多项式:

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 + 28\lambda + 24 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$$

• 对于  $\lambda_1 = 2$ , 解方程组  $(B - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 对于  $\lambda_2 = 6$ , 解方程组  $(B - 6I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 的一组解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

即:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

从而:

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2^n & -2^n & 6^n \\ 0 & 2^n & -2 \cdot 6^n \\ 2^n & 0 & 3 \cdot 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \cdot 2^n - 6^n & 2^{n+1} - 6^n & -2^n + 6^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 6^n & 2^{n+1} + 2 \cdot 6^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 6^n \\ 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 6^n & 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 6^n & 2^n + 3 \cdot 6^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

6. 令  $A$  是  $n \times n$  的矩阵, 证明  $A^T$  和  $A$  的特征值相同。

**解答.** 注意到:

$$(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$$

从而我们有:

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I)$$

从而  $A$  和  $A^T$  的特征值相同。

□