第十三次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 5 月 20 日

截止日期 2023 年 5 月 27 日

1. 计算下列矩阵的特征值和特征向量：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-15} \\ 0 & 1 + 10^{-15} \end{bmatrix}$$

   可以看到 A 是一个很接近对称矩阵的矩阵，但 A 的特征向量距离“正交”却相差很远。计算其特征向量的夹角。

2. 判断下列语句的真假，并给出理由：

   - 若 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，且 A 的特征值是实数，对应的特征向量是实向量，则 A 是对称矩阵。
   - 若对称矩阵 S 可逆，则其逆矩阵一定是对称矩阵。
   - 令对称矩阵具有谱分解 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，则其特征向量矩阵 Q 是对称矩阵。

3. 下列矩阵中，哪些矩阵的特征值都是大于 0 的？请尝试不要直接计算 λ，而是通过判断是否存在 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x}<0$ 来进行判断。

$$S_1=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 6 & 7\end{bmatrix},\ S_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ S_3=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 10 & 100\end{bmatrix},\ S_4=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 10 & 101\end{bmatrix}$$

4. 给定下列矩阵 A，判断 $A^{\mathrm{T}}A$ 是否是正定的：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

5. 考察实 $n \times n$ 的实反对称矩阵 A，即其满足 $A^{\mathrm{T}} = -A$。请注意在第 2 问中特征向量可能是复向量，即此时 $\|\mathbf{z}\|^2 = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$。

(1) 证明对任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = 0$。

(2) 证明实反对称矩阵的特征值一定是虚数。

(3) 进一步证明 $\det(A) \geq 0$

hint: 考虑其特征值和特征向量 $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$，则 $\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = \lambda\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \lambda\|\mathbf{z}\|^2$

6. 最后让我们来看下实对称矩阵的特征值是实数的证明，考虑下面这样一个看上去很简单的证明，请指出错误在哪?

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$$

作为一个例子，大家可以考虑逆时针旋转 $90\,\mathrm{deg}$ 的矩阵 $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，其特征值 i 对应的特征向量是 $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$