第十三次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 6 月 1 日

1. 计算下列矩阵的特征值和特征向量：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-15} \\ 0 & 1+10^{-15} \end{bmatrix}$$

可以看到 A 是一个很接近对称矩阵的矩阵，但 A 的特征向量距离“正交”却相差很远。计算其特征向量的夹角。

解答. 其特征多项式为：

$$f_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 10^{-15} \\ 0 & 1+10^{-15}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+10^{-15}-\lambda)$$

从而得到特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 1+10^{-15}$，

- 对于 $\lambda_1 = 1$，有 $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix} 0 & 10^{-15} \\ 0 & 10^{-15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而得到特征向量 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

- 对于 $\lambda_2 = 1+10^{-15}$，有 $(A-(1+10^{-15})I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix} -10^{-15} & 10^{-15} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而得到特征向量 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。

不难计算得到 $\cos\theta = \frac{\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$。 □

2. 判断下列语句的真假，并给出理由：

- 若 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，且 A 的特征值是实数，对应的特征向量是实向量，则 A 是对称矩阵。
- 若对称矩阵 S 可逆，则其逆矩阵一定是对称矩阵。
- 令对称矩阵具有谱分解 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，则其特征向量矩阵 Q 是对称矩阵。

解答.

- 错误，取矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 即知，其特征值为 1，对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- 正确，对于对称矩阵 S，其逆矩阵 S^{-1} 也是对称矩阵，因为 $(S^{-1})^{\mathrm{T}} = (S^{\mathrm{T}})^{-1} = S^{-1}$。
- 错误，取矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则我们有：

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

□

3. 下列矩阵中，哪些矩阵的特征值都是大于 0 的？请尝试不要直接计算 λ，而是通过判断是否存在 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S \mathbf{x} < 0$ 来进行判断。

$$S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix},\ S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$$

解答.

(1) 对于 S_1，注意到：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_1 \mathbf{x} = 5x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2$$

从而存在 $\mathbf{x} \neq 0$ 使得 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_1 \mathbf{x} \leq 0$，即 S_1 的特征值不全大于 0。

(2) 对于 S_2，注意到：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_2 \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$$

从而存在 $\mathbf{x} \neq 0$ 使得 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_2 \mathbf{x} \leq 0$，即 S_2 的特征值不全大于 0。

(3) 对于 S_3，注意到：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_3 \mathbf{x} = x_1^2 + 20x_1x_2 + 100x_2^2 = (x_1 + 10x_2)^2$$

从而存在 $\mathbf{x} \neq 0$ 使得 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_3 \mathbf{x} \leq 0$，即 S_3 的特征值不全大于 0。

(4) 对于 S_4，注意到：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_4 \mathbf{x} = x_1^2 + 20x_1x_2 + 101x_2^2 = (x_1 + 10x_2)^2 + x_2^2$$

从而不存在 $\mathbf{x} \neq 0$ 使得 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S_4 \mathbf{x} \leq 0$，即 S_4 的特征值全大于 0。

□

4. 给定下列矩阵 A，判断 $A^{\mathrm{T}} A$ 是否是正定的：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解答.

(1) 由 $\mathrm{rank}(A) = 2$，从而 $A^{\mathrm{T}} A$ 是正定的。

(2) 由 $\mathrm{rank}(A) = 2$，从而 $A^{\mathrm{T}} A$ 也是正定的。

(3) 由 $\text{rank}(A) = 2 < 3$，从而 $A^{\mathrm{T}}A$ 不是正定的。

$\square$

5. 考察实 $n \times n$ 的实反对称矩阵 A，即其满足 $A^{\mathrm{T}} = -A$。请注意在第 2 问中特征向量可能是复向量，即此时 $\|\mathbf{z}\|^2 = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$。

(1) 证明对任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = 0$。

(2) 证明实反对称矩阵的特征值一定是虚数。

(3) 进一步证明 $\det(A) \geq 0$

hint: 考虑其特征值和特征向量 $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$，则 $\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = \lambda\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \lambda\|\mathbf{z}\|^2$

解答.

- 考虑 $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$，注意到其是实数，从而我们有：

$$(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$$
$$(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$$

  从而 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = 0$。

- 设 λ 是 A 的特征值，$\mathbf{z}$ 是对应的特征向量，从而有：

$$A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} \Rightarrow \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = \lambda\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \lambda\|\mathbf{z}\|^2$$

  对上式取共轭转置得：

$$\bar{\lambda}\|\mathbf{z}\|^2 = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = (\overline{\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z}})^{\mathrm{T}} = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{z} = -\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = -\lambda\|\mathbf{z}\|^2$$

  从而 $\bar{\lambda} = -\lambda$，即 λ 是虚数。

- 令 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，由第二问知 λ_i 是虚数，又 λ_i 是 n 次实系数多项式 $f_A(\lambda)$ 的根，从而 $f_A(\lambda)$ 的根都是共轭出现的，即 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n}\|\lambda_i\| \geq 0$。

$\square$

6. 最后让我们来看下实对称矩阵的特征值是实数的证明，考虑下面这样一个看上去很简单的证明，请指出错误在哪？

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$$

作为一个例子，大家可以考虑逆时针旋转 90 deg 的矩阵 $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，其特征值 i 对应的特征向量是 $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

解答. 事实上，特征向量可能有复数的可能，即当假设 λ 不一定是实数的时候，我们不能假设特征向量 $\mathbf{x}$ 是实向量。 $\square$