第十四次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 5 月 27 日

截止日期　2023 年 6 月 3 日

1. 判断下列语句的真假，并给出理由：
    - 若 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，且 A 的特征值是实数，对应的特征向量是实向量，则 A 是对称矩阵。
    - 若对称矩阵 S 可逆，则其逆矩阵一定是对称矩阵。
    - 令对称矩阵具有谱分解 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，则其特征向量矩阵 Q 是对称矩阵。

2. 计算下列矩阵的特征值和特征向量：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-18} \\ 0 & 1 + 10^{-18} \end{bmatrix}$$

可以看到 A 是一个很接近对称矩阵的矩阵，但 A 的特征向量距离“正交”却相差很远。计算其特征向量的夹角。

3. 让我们来看下实对称矩阵的特征值是实数的证明，考虑下面这样一个看上去很简单的证明，请指出错误在哪？

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$$

作为一个例子，大家可以考虑逆时针旋转 $90°$ 的矩阵 $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，其特征值 i 对应的特征向量是 $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

4. 对角化下列矩阵：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

并令其中的 $X\Lambda X^{-1}$ 中的 X 是正交矩阵，即找到正交矩阵 X 和对角矩阵 Λ 使得 $S = X\Lambda X^{\mathrm{T}}$。

5. 令 A_1, A_2 是两个 $n \times n$ 的可逆矩阵。

(1) 证明存在可逆矩阵 B 使得

$$A_2 A_1 = B A_1 A_2 B^{-1}$$

(2) 证明 $A_1 A_2$ 和 $A_2 A_1$ 有相同的特征值。

6. 考察实 $n \times n$ 的实反对称矩阵 A，即其满足 $A^{\mathrm{T}} = -A$。请注意在第 2 问中特征向量可能是复向量，即此时 $\|\mathbf{z}\|^2 = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}$。

(1) 证明对任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} = 0$。

(2) 证明实反对称矩阵的特征值一定是虚数。

(3) 进一步证明 $\det(A) \geq 0$

hint: 考虑其特征值和特征向量 $A\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$，则 $\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} A \mathbf{z} = \lambda \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} \mathbf{z} = \lambda \|\mathbf{z}\|^2$