第十四次作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 6 月 6 日

1. 判断下列语句的真假，并给出理由：

   - 若 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，且 A 的特征值是实数，对应的特征向量是实向量，则 A 是对称矩阵。
   - 若对称矩阵 S 可逆，则其逆矩阵一定是对称矩阵。
   - 令对称矩阵具有谱分解 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，则其特征向量矩阵 Q 是对称矩阵。

   解答.

   - 错误，取矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 即知，其特征值为 1，对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   - 正确，对于对称矩阵 S，其逆矩阵 S^{-1} 也是对称矩阵，因为 $(S^{-1})^{\mathrm{T}} = (S^{\mathrm{T}})^{-1} = S^{-1}$。
   - 错误，取矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则我们有：

   $$S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

   □

2. 计算下列矩阵的特征值和特征向量：

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-18} \\ 0 & 1 + 10^{-18} \end{bmatrix}$$

   可以看到 A 是一个很接近对称矩阵的矩阵，但 A 的特征向量距离“正交”却相差很远。计算其特征向量的夹角。

   解答. 其特征多项式为：

   $$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 10^{-18} \\ 0 & 1 + 10^{-18} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 + 10^{-18} - \lambda)$$

   从而得到特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 1 + 10^{-18}$，

   - 对于 $\lambda_1 = 1$，有 $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

   $$\begin{bmatrix} 0 & 10^{-18} \\ 0 & 10^{-18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   从而得到特征向量 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

- 对于 $\lambda_2 = 1 + 10^{-18}$，有 $(A - (1 + 10^{-15})I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix} -10^{-18} & 10^{-18} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  从而得到特征向量 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。

不难计算得到 $\cos\theta = \frac{\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$。 □

3. 让我们来看下实对称矩阵的特征值是实数的证明，考虑下面这样一个看上去很简单的证明，请指出错误在哪？

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$$

作为一个例子，大家可以考虑逆时针旋转 $90°$ 的矩阵 $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，其特征值 i 对应的特征向量是 $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

解答. 事实上，特征向量可能有复数的可能，即当假设 λ 不一定是实数的时候，我们不能假设特征向量 $\mathbf{x}$ 是实向量。 □

4. 对角化下列矩阵：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

并令其中的 $X\Lambda X^{-1}$ 中的 X 是正交矩阵，即找到正交矩阵 X 和对角矩阵 Λ 使得 $S = X\Lambda X^{\mathrm{T}}$。

解答. 计算其特征多项式得：

$$\det(S - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$

其有 3 个特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = -3$。

- 对于 $\lambda_1 = 0$，解方程组 $(S - 0I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，得到其对应的特征向量为：

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 对于 $\lambda_2 = 3$，解方程组 $(S - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，得到其对应的特征向量为：

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 对于 $\lambda_3=-3$，解方程组 $(S+3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，得到其对应的特征向量为：

$$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$S=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

将 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_3$ 单位化可得正交矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$S=Q\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}Q^{-1}=Q\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

□

5. 令 A_1,A_2 是两个 $n\times n$ 的可逆矩阵。

(1) 证明存在可逆矩阵 B 使得

$$A_2A_1=BA_1A_2B^{-1}$$

(2) 证明 A_1A_2 和 A_2A_1 有相同的特征值。

解答.

- 令 $B=A_2$，则有：

$$BA_1A_2B^{-1}=A_2A_1A_2A_2^{-1}=A_2A_1$$

- 利用上题的记号，令 λ 是 A_1A_2 的特征值，$\mathbf{x}$ 是对应的特征向量，从而有:

$$A_1A_2\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow A_2A_1(B\mathbf{x})=BA_1A_2B^{-1}(B\mathbf{x})=\lambda B\mathbf{x}$$

另一方面，令 λ' 是 A_2A_1 的特征值，$\mathbf{x}'$ 是对应的特征向量，从而有:

$$A_2A_1\mathbf{x}'=\lambda'\mathbf{x}'\Rightarrow A_1A_2(B^{-1}\mathbf{x}')=B^{-1}A_1A_2B(B^{-1}\mathbf{x}')=\lambda'B^{-1}\mathbf{x}'$$

从而 A_1A_2 和 A_2A_1 具有相同的特征值。

□

6. 考察实 $n\times n$ 的实反对称矩阵 A，即其满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$。请注意在第 2 问中特征向量可能是复向量，即此时 $\|\mathbf{z}\|^2=\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$。

(1) 证明对任意向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}=0$。

(2) 证明实反对称矩阵的特征值一定是虚数。

(3) 进一步证明 $\det(A) \geq 0$

hint: 考虑其特征值和特征向量 $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$，则 $\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = \lambda\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \lambda\|\mathbf{z}\|^2$

解答.

- 考虑 $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$，注意到其是实数，从而我们有：

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \\
(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} &= (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

  从而 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = 0$。
- 设 λ 是 A 的特征值，$\mathbf{z}$ 是对应的特征向量，从而有：

$$A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} \Rightarrow \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = \lambda\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \lambda\|\mathbf{z}\|^2$$

  对上式取共轭转置得：

$$\bar{\lambda}\|\mathbf{z}\|^2 = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = (\overline{\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z}})^{\mathrm{T}} = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{z} = -\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}A\mathbf{z} = -\lambda\|\mathbf{z}\|^2$$

  从而 $\bar{\lambda} = -\lambda$，即 λ 是虚数。
- 令 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，由第二问知 λ_i 是虚数，又 λ_i 是 n 次实系数多项式 $f_A(\lambda)$ 的根，从而 $f_A(\lambda)$ 的根都是共轭出现的，即 $\det(A) = \prod_{i=1}^n \|\lambda_i\| \geq 0$。

□