# 第十四次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 5 月 28 日

**截止日期** 2023 年 6 月 3 日

1. 对角化下列矩阵：
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
并令其中的 $X\Lambda X^{-1}$ 中的 $X$ 是正交矩阵，即找到正交矩阵 $X$ 和对角矩阵 $\Lambda$ 使得 $S = X\Lambda X^{\mathrm{T}}$。

2. 给出 $t, s$ 的取值使得下列矩阵是正定的：
$$S = \begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix}, \ T = \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

3. 将下列二次型转化成标准型，并写出相应的矩阵表示：

(1) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

(2) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

4. 判断下列语句的真假，并给出理由：

(1) 正定矩阵是可逆的。

(2) 唯一正定的投影矩阵是单位矩阵，即 $P = I$。

(3) 对角线上都是正数的对称矩阵是正定的。

5. 给定两个 $n \times n$ 的正定的对称矩阵 $S, T$:

(1) 给出一个例子说明 $ST$ 不是对称的。

(2) 证明 $ST$ 的特征值是正的。

hint: 考虑 $ST\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 和 $T\mathbf{x}$ 的点积。

6. 假设 $n \times n$ 的对称矩阵 $S$ 是正的，其特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$：

(1) 求 $\lambda_1 I - S$ 的特征值，该矩阵是半正定的么?

(2) 证明对任意的 $\mathbf{x}$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x} \leq \lambda_1 \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$。

(3) 求 $\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$.