第十四次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 6 月 6 日

1. 对角化下列矩阵：
$$S=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$$
并令其中的 $X\Lambda X^{-1}$ 中的 X 是正交矩阵，即找到正交矩阵 X 和对角矩阵 Λ 使得 $S=X\Lambda X^{\mathrm{T}}$。

解答. 计算其特征多项式得：
$$\det(S-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&-1-\lambda&-2\\2&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+9\lambda=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$
其有 3 个特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$。

- 对于 $\lambda_1=0$，解方程组 $(S-0I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，得到其对应的特征向量为：
$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$
- 对于 $\lambda_2=3$，解方程组 $(S-3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，得到其对应的特征向量为：
$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$
- 对于 $\lambda_3=-3$，解方程组 $(S+3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，得到其对应的特征向量为：
$$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$$

从而我们有：
$$S=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{bmatrix}$$
将 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_3$ 单位化可得正交矩阵：
$$Q=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$S=Q\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}Q^{-1}=Q\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

□

2. 给出 t, s 的取值使得下列矩阵是正定的：

$$S=\begin{bmatrix}s&-4&-4\\-4&s&-4\\-4&-4&s\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}t&3&0\\3&t&4\\0&4&t\end{bmatrix}$$

解答. 我们使用两种方式进行处理。

对于 S，注意到 S 是正定的当且仅当：

$$\begin{vmatrix}s\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}s&-4\\-4&s\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}s&-4&-4\\-4&s&-4\\-4&-4&s\end{vmatrix}>0$$

计算可得：

$$s>0,\ s^2-16>0,\ (s-8)(s+4)^2>0$$

从而我们有 $s>8$。

对于 T，注意到 T 是正定的当且仅当：

$$\det(T-\lambda I)=(t-\lambda)(t-\lambda+5)(t-\lambda-5)\text{有 3 个正根}$$

从而我们有 $t>5$。 □

3. 将下列二次型转化成标准型，并写出相应的矩阵表示：

(1) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x}=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$

(2) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x}=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$

解答. 我们也分别用多角化和配方法进行处理。

(1) $S=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$，计算其对角化形式为：

$$S=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2+\sqrt{2}&0\\0&0&2-\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

从而令 $\mathbf{y}=Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$，即：

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3\\\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{bmatrix}$$

有：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x}=2y_1^2+(2+\sqrt{2})y_2^2+(2-\sqrt{2})y_3^2$$

(2) 我们利用配方法，注意到：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x} = a(x_1 + \sqrt{\frac{b}{a}}x_2)^2 + (c - \frac{b^2}{a})x_2^2$$

从而令 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{b}{a}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，我们有：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}S\mathbf{x} = ay_1^2 + (c - \frac{b^2}{a})y_2^2$$

□

4. 判断下列语句的真假，并给出理由：

(1) 正定矩阵是可逆的。
(2) 唯一正定的投影矩阵是单位矩阵，即 $P = I$。
(3) 对角线上都是正数的对称矩阵是正定的。

解答.

(1) **真**。正定矩阵的特征值都是正的，从而其行列式不为 0，即可逆。
(2) **真**。投影矩阵的特征值只有 0 和 1，从而唯一正定的投影矩阵是单位矩阵。
(3) **假**。考虑：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

其对应的特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$，从而不是正定的。

□

5. 给定两个 $n \times n$ 的正定的对称矩阵 S, T:

(1) 给出一个例子说明 ST 不是对称的。
(2) 证明 ST 的特征值是正的。

hint: 考虑 $ST\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 和 $T\mathbf{x}$ 的点积。

解答.

(1) 考虑：$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ S, T 都是正定的，但是其乘积 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 不是对称的。
(2) 令 λ 是 ST 的特征值，$\mathbf{x}$ 是对应的特征向量，即 $ST\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，显然 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $T\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，从而有：
   - $(T\mathbf{x}) \cdot ST\mathbf{x} = (T\mathbf{x})^{\mathrm{T}}S(T\mathbf{x})$。
   - $(T\mathbf{x}) \cdot ST\mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}T\mathbf{x}$。

   由 S, T 是正定的我们可以得到 $\lambda > 0$

□

6. 假设 $n \times n$ 的对称矩阵 S 是正的，其特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$:

(1) 求 $\lambda_1 I - S$ 的特征值，该矩阵是半正定的么？
(2) 证明对任意的 $\mathbf{x}$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x} \le \lambda_1 \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$。
(3) 求 $\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$.

解答.

(1) 由 $\det(\lambda I - S) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$ 可知：

$$\det(\lambda I - (\lambda_1 I - S)) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_1 + \lambda_i)$$

从而 $\lambda_1 I - S$ 的特征值为 $0, \lambda_1 - \lambda_2, \cdots, \lambda_1 - \lambda_n \ge 0$，因此该矩阵是半正定的。
(2) 由 $\lambda_1 I - S$ 是半正定的可知，对于任意的 $\mathbf{x}$，有 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\lambda_1 I - S)\mathbf{x} \ge 0$，即 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x} \le \lambda_1 \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$。
(3) 由 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x} \le \lambda_1 \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ 可知：

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} S\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} = \lambda_1$$

□