

第十五次作业

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 6 月 6 日

截止日期 本次作业不需要提交，仅供大家参考。

1. 给出 t, s 的取值使得下列矩阵是正定的：

$$S = \begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

2. 将下列二次型转化成标准型，并写出相应的矩阵表示：

(1) $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

(2) $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

3. 判断下列语句的真假，并给出理由：

- (1) 正定矩阵是可逆的。
- (2) 唯一正定的投影矩阵是单位矩阵，即 $P = I$ 。
- (3) 对角线上都是正数的对称矩阵是正定的。

4. 给定两个 $n \times n$ 的正定的对称矩阵 S, T :

- (1) 给出一个例子说明 ST 不是对称的。
- (2) 证明 ST 的特征值是正的。

hint: 考虑 $ST\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 和 $T\mathbf{x}$ 的点积。

5. 假设 $n \times n$ 的对称矩阵 S 是正的, 其特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$:

(1) 求 $\lambda_1 I - S$ 的特征值, 该矩阵是半正定的么?

(2) 证明对任意的 \mathbf{x} , 有 $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} \leq \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 。

(3) 求 $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T S \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 。