

## 第十五次作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 6 月 6 日

1. 给出  $t, s$  的取值使得下列矩阵是正定的:

$$S = \begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

**解答.** 我们使用两种方式进行处理。

对于  $S$ , 注意到  $S$  是正定的当且仅当:

$$|s| > 0, \begin{vmatrix} s & -4 \\ -4 & s \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{vmatrix} > 0$$

计算可得:

$$s > 0, s^2 - 16 > 0, (s - 8)(s + 4)^2 > 0$$

从而我们有  $s > 8$ 。

对于  $T$ , 注意到  $T$  是正定的当且仅当:

$$\det(T - \lambda I) = (t - \lambda)(t - \lambda + 5)(t - \lambda - 5) \text{ 有 3 个正根}$$

从而我们有  $t > 5$ 。 □

2. 将下列二次型转化成标准型, 并写出相应的矩阵表示:

(1)  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

(2)  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

**解答.** 我们也分别用多角化和配方法进行处理。

(1)  $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , 计算其对角化形式为:

$$S = Q \Lambda Q^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

从而令  $\mathbf{y} = Q^T \mathbf{x}$ , 即:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$$

有:

$$\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = 2y_1^2 + (2 + \sqrt{2})y_2^2 + (2 - \sqrt{2})y_3^2$$

(2) 我们利用配方法, 注意到:

$$\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = a(x_1 + \sqrt{\frac{b}{a}}x_2)^2 + (c - \frac{b^2}{a})x_2^2$$

从而令  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{b}{a}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , 我们有:

$$\mathbf{x}^T S \mathbf{x} = ay_1^2 + (c - \frac{b^2}{a})y_2^2$$

□

3. 判断下列语句的真假, 并给出理由:

- (1) 正定矩阵是可逆的。
- (2) 唯一正定的投影矩阵是单位矩阵, 即  $P = I$ 。
- (3) 对角线上都是正数的对称矩阵是正定的。

**解答.**

- (1) **真**. 正定矩阵的特征值都是正的, 从而其行列式不为 0, 即可逆。
- (2) **真**. 投影矩阵的特征值只有 0 和 1, 从而唯一正定的投影矩阵是单位矩阵。
- (3) **假**. 考虑:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

其对应的特征值为  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ , 从而不是正定的。

□

4. 给定两个  $n \times n$  的正定的对称矩阵  $S, T$ :

- (1) 给出一个例子说明  $ST$  不是对称的。
- (2) 证明  $ST$  的特征值是正的。

hint: 考虑  $ST\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  和  $T\mathbf{x}$  的点积。

**解答.**

(1) 考虑:  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$   $S, T$  都是正定的, 但是其乘积  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  不是对称的。

(2) 令  $\lambda$  是  $ST$  的特征值,  $\mathbf{x}$  是对应的特征向量, 即  $ST\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , 显然  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, T\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 从而有:

- $(T\mathbf{x}) \cdot ST\mathbf{x} = (T\mathbf{x})^T S(T\mathbf{x})$ 。
- $(T\mathbf{x}) \cdot ST\mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x})^T \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^T T\mathbf{x}$ 。

由  $S, T$  是正定的我们可以得到  $\lambda > 0$

□

5. 假设  $n \times n$  的对称矩阵  $S$  是正的, 其特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ :

- (1) 求  $\lambda_1 I - S$  的特征值, 该矩阵是半正定的么?  
(2) 证明对任意的  $\mathbf{x}$ , 有  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} \leq \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ .  
(3) 求  $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T S \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ .

解答.

- (1) 由  $\det(\lambda I - S) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$  可知:

$$\det(\lambda I - (\lambda_1 I - S)) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_1 + \lambda_i)$$

从而  $\lambda_1 I - S$  的特征值为  $0, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_1 - \lambda_n \geq 0$ , 因此该矩阵是半正定的。

- (2) 由  $\lambda_1 I - S$  是半正定的可知, 对于任意的  $\mathbf{x}$ , 有  $\mathbf{x}^T (\lambda_1 I - S) \mathbf{x} \geq 0$ , 即  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} \leq \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ .  
(3) 由  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} \leq \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  可知:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T S \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_1$$

□