第十五次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 6 月 6 日

截止日期　本次作业不需要提交，仅供大家参考。

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，求 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 在如下的一组基下的坐标：

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 令 T 是一个 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{V}$ 上的变换，称 $\mathbf{v}_i(i = 1, 2, 3)$ 是 T 的特征向量，如果 $T\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$，其中 $\lambda_i \neq 0 \in \mathbb{C}$。如果 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{V}$ 中的一组基，则 T 在这组基下的矩阵表示是什么？

3. 给定下列三组基 $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}}$ 和 $\overline{\mathbf{w}}$:

$$\overline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\\13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

- 求 $\overline{\mathbf{u}}$ 到 $\overline{\mathbf{v}}$ 的过渡矩阵 P。
- 求 $\overline{\mathbf{v}}$ 到 $\overline{\mathbf{w}}$ 的过渡矩阵 Q。

4. 令 $\mathbb{T}$ 是一个 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{W}$ 的线性变换，$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{V}$ 的一组基，$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3$ 是 $\mathbb{W}$ 的一组基, 并且有:

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_2,\ T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3$$

令 A 是在基 $\overline{\mathbf{v}}$ 和基 $\overline{\mathbf{w}}$ 下线性变换 T 的矩阵表示。

- 给出 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的值。
- 令 $\mathbb{V} = \mathbb{W}$，是否可以说线性变换 T^2 在基 $\overline{\mathbf{v}}$ 和基 $\overline{\mathbf{w}}$ 下线性变换 T 的矩阵表示是 A^2?