第十五次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 6 月 6 日

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，求 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 在如下的一组基下的坐标：

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

解答. 解方程：

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

得到 $x_1=3,x_2=-2,x_3=-1$，所以 $\mathbf{a}$ 在这组基下的坐标是 $(3,-2,-1)$。 □

2. 令 T 是一个 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{V}$ 上的变换，称 $\mathbf{v}_i(i=1,2,3)$ 是 T 的特征向量，如果 $T\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$，其中 $\lambda_i\neq 0\in\mathbb{C}$。如果 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{V}$ 中的一组基，则 T 在这组基下的矩阵表示是什么？

解答. T 的矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$$

□

Remark 0.1

特征向量所构成的基其实就是这个线性变换最简单的矩阵表示。

3. 给定下列三组基 $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}}$ 和 $\overline{\mathbf{w}}$：

$$\overline{\mathbf{u}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{v}}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\7\\13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{w}}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

- 求 $\overline{\mathbf{u}}$ 到 $\overline{\mathbf{v}}$ 的过渡矩阵 P。
- 求 $\overline{\mathbf{v}}$ 到 $\overline{\mathbf{w}}$ 的过渡矩阵 Q。

解答.

- $\overline{\mathbf{u}}$ 到 $\overline{\mathbf{v}}$ 的过渡矩阵 P 满足：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\end{bmatrix}P$$

从而 P 满足：

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\2&7&1\\4&13&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}P\implies P=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&7&1\\4&13&2\end{bmatrix}$$

- $\overline{\mathbf{v}}$ 到 $\overline{\mathbf{w}}$ 的过渡矩阵 Q 满足：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\end{bmatrix} Q$$

从而 Q 满足：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & 1\\ 4 & 13 & 2\end{bmatrix} Q \Longrightarrow Q = \begin{bmatrix}-2 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

□

Remark 0.2

可以看到，标准基到其他基的过渡矩阵是非常好算的。

4. 令 $\mathbb{T}$ 是一个 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{W}$ 的线性变换，$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{V}$ 的一组基，$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3$ 是 $\mathbb{W}$ 的一组基，并且有：

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_2,\ T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3$$

令 A 是在基 $\overline{\mathbf{v}}$ 和基 $\overline{\mathbf{w}}$ 下线性变换 T 的矩阵表示。

- 给出 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的值。
- 令 $\mathbb{V} = \mathbb{W}$，是否可以说线性变换 T^2 在基 $\overline{\mathbf{v}}$ 和基 $\overline{\mathbf{w}}$ 下线性变换 T 的矩阵表示是 A^2?

解答.

(1) 由于 $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$，从而 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

(2) 不可以，因为 $\overline{\mathbf{v}}$ 和 $\overline{\mathbf{w}}$ 不一定相同。

□

5. 给定 n 维的向量空间 $\mathbb{V}$，T 是 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{V}$ 上的一个线性变换，其在基 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 下的矩阵是 A。若 $A^2 = A$，证明存在 $\mathbb{V}$ 上的一组基 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n$，使得 T 在这组基下的矩阵是对角矩阵。

解答. 我们先证明：

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A - I) = n$$

事实上由 $A(A - I) = O$ 我们有：

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A - I) \le \mathrm{rank}(A) + \dim(\mathbf{N}(A)) = n$$

另一方面：

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A - I) \ge \mathrm{rank}(A + I - A) = \mathrm{rank}(I) = n$$

从而 A 的特征值为 0 和 1，并且注意到存在一组基：

$$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}'_1, \cdots, \mathbf{u}'_{n-k}$$

满足：

$$A(\mathbf{u}_i) = 0\mathbf{u}_i,\ A(\mathbf{u}_i') = \mathbf{u}_i'$$

定义：

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1', \cdots, \mathbf{u}_{n-k}'\end{bmatrix}$$

则 P 是可逆矩阵，并且：

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} O & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

另一方面，注意到:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\end{bmatrix} P$$

则我们有：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}T(\mathbf{u}_1), \cdots, T(\mathbf{u}_k, T(\mathbf{u}_1')), \cdots T(\mathbf{u}_{n-k}')\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}T(\mathbf{v})_1, \cdots, T(\mathbf{v}_n)\end{bmatrix} P \\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\end{bmatrix} AP \\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1', \cdots, \mathbf{u}_{n-k}'\end{bmatrix} P^{-1}AP
\end{aligned}$$

从而 $P^{-1}AP$ 是线性变换 T 在基 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1', \cdots, \mathbf{u}_{n-k}'$ 下的矩阵表示，即 T 在这组基下的矩阵是对角矩阵。 $\square$