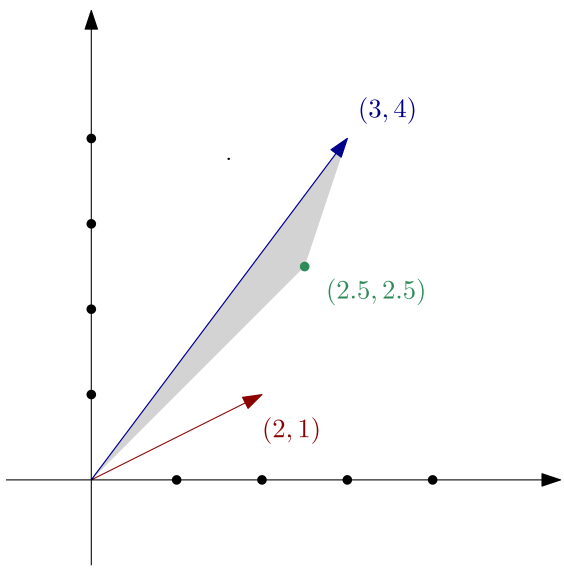
第一次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 2 月 27 日

截止日期　2023 年 3 月 4 日

1. 给定二维向量 $\mathbf{u} = (2, 1)$，$\mathbf{v} = (3, 4)$：
   - 请描述所有满足 $c + d = 1$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 在平面上的图像。
   - 如果线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 描述的是图中的阴影部分，请给出 c 和 d 所满足的条件。



2. 请证明点积的如下性质：
   - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
   - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
   - $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.
3. 是否存在 3 个二维向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 使得 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$，$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} < 0$? 如果存在，请给出一个例子；如果不存在，请证明之。
4. 考虑一个如下的例子：
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   - 给出一组非零的满足上述方程的解 x_1, x_2, x_3。
   - 令该矩阵的列向量为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$，根据你的解来解释一下上述式子。
   - 令该矩阵的行组成向量为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$，其构成一个平面，请解释为什么你给出的解 (x_1, x_2, x_3) 和着个平面垂直。

5. "乘上一个矩阵 A" 是线性变换。这句话的意思是指:

如果 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的线性变换，那么 $A\mathbf{w}$ 是 $A\mathbf{u}$ 和 $A\mathbf{v}$ 的线性变换。

令 $\mathbf{u} = (1, 0), \mathbf{v} = (0, 1), \mathbf{w} = (5, 7)$。请给出 $A\mathbf{w}$ 与 $A\mathbf{u}$ 和 $A\mathbf{v}$ 的关系。

6. 考虑如下的一个矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

试找出会使得无法得到 3 个首元的 a 的值。