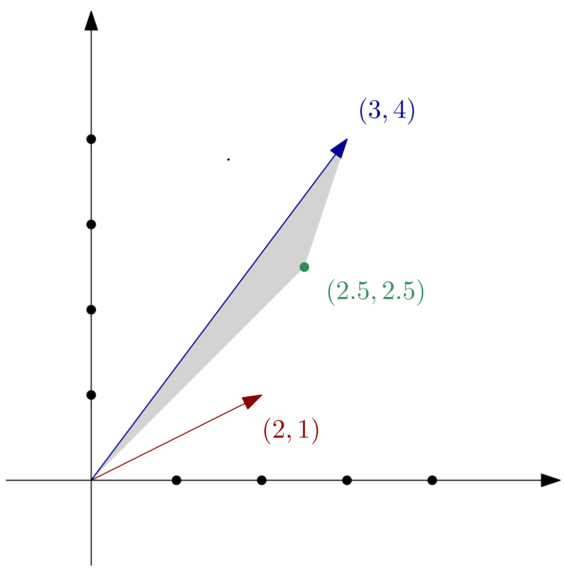
线性代数 For CS　　Lecture 1

第一次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 3 月 25 日

截止日期　2023 年 3 月 4 日

1. 给定二维向量 $\mathbf{u} = (2, 1)$，$\mathbf{v} = (3, 4)$：
   - 请描述所有满足 $c + d = 1$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 在平面上的图像。
   - 如果线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 描述的是图中的阴影部分，请给出 c 和 d 所满足的条件。



解答.

- 满足 $c + d = 1$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 在平面上的图像是过 $(3, 4)$ 和 $(2, 1)$ 的一条直线。
- 图中阴影部分对应的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 满足 $c + d \leq 1$ 并且 $d \geq c \geq 0$。

□

Remark 0.1

我们给第二问再给出两个证明：

- 事实上任何一个阴影的点必须满足如下的条件：

$$\exists, \lambda, \eta \in [0, 1],\ s.t.\ \lambda\mathbf{v} + \eta(\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{u})\ and\ \lambda + \eta \leq 1$$

  从而我们有：

$$d + c = \lambda + \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta \leq 1,\ d = \lambda + \frac{1}{2}\eta \geq \frac{1}{2}\eta = c,\ c = \frac{1}{2}\eta \geq 0$$

  上述不等式等号成立的条件为阴影部分的边界。

- 我们再尝试使用线性规划的方法证明，令这个点为 (x, y)，则有：

$$\begin{cases} 3y - 4x \leq 0 \\ y - x \geq 0 \\ y - 3x + 5 \geq 0 \\ x = 2c + 3d \\ y = c + 4d \end{cases}$$

从而我们有：

$$\begin{cases} c \geq 0 \\ d - c \geq 0 \\ c + d \leq 1 \end{cases}$$

2. 请证明点积的如下性质：

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

解答.

- 由定义：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

- 由定义：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + \cdots + u_n(v_n + w_n) \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) + (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

- 由定义：

$$\begin{aligned} (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2 + \cdots + (cu_n)v_n \\ &= c(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

□

3. 是否存在 3 个二维向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 使得 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$，$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} < 0$? 如果存在，请给出一个例子；如果不存在，请证明之。

解答. 存在，只要令其夹角都大于 90° 即可。例如，令 $\mathbf{u} = (1, 0)$，$\mathbf{v} = (-1, 3)$，$\mathbf{w} = (-1, -1)$。 □

Remark 0.2

事实上，4 个是不可以的。一般来说，对于 R^n 的空间，我们可以找到 $n+1$ 个向量，使得它们的点积都是负数，而 $n+2$ 个则不行。

4. 考虑一个如下的例子：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 给出一组非零的满足上述方程的解 x_1, x_2, x_3。
- 令该矩阵的列向量为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$，根据你的解来解释一下上述式子。
- 令该矩阵的行组成向量为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$，其构成一个平面，请解释为什么你给出的解 (x_1, x_2, x_3) 和这个平面垂直。

解答.

- $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.
- 其对应的线性组合为 $\mathbf{0}$，即：$x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + x_3\mathbf{s}_3 = \mathbf{0}$。
- 由乘法定义，对其每一行 $\mathbf{r}_i$ 都有 $\mathbf{r}_i \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$，从而 (x_1, x_2, x_3) 与 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 均垂直，即和整个平面垂直。

□

5. “乘上一个矩阵 A” 是线性变换。这句话的意思是指：

如果 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的线性变换，那么 $A\mathbf{w}$ 是 $A\mathbf{u}$ 和 $A\mathbf{v}$ 的线性变换。

令 $\mathbf{u} = (1, 0), \mathbf{v} = (0, 1), \mathbf{w} = (5, 7)$。请给出 $A\mathbf{w}$ 与 $A\mathbf{u}$ 和 $A\mathbf{v}$ 的关系。

解答. 注意到 $\mathbf{w} = 5\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$，所以 $A\mathbf{w} = 5A\mathbf{u} + 7A\mathbf{v}$。 □

Remark 0.3

线性变换的意义其实在于对于加法和数乘的保持，即 $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ 和 $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$。

6. 考虑如下的一个矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

试找出会使得无法得到 3 个首元的 a 的值。

解答. 一共有 3 种情况：

- $a = 0$，此时存在一列为 0.
- $a = 2$，此时第一列和第二列相等。
- $a = 4$，此时第一行和第二行相等。

□