

## 第一次作业

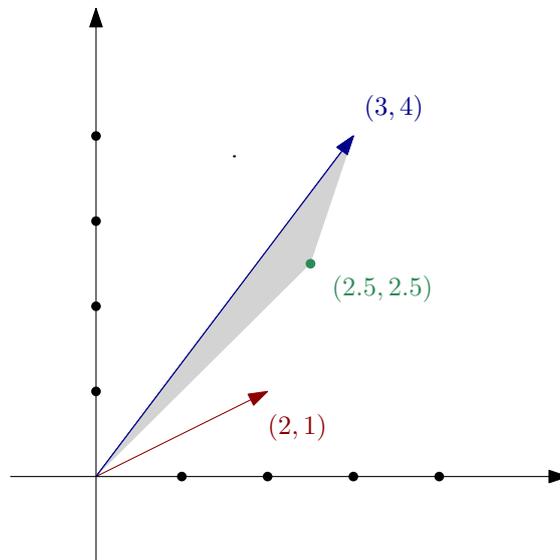
LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 2 月 27 日

截止日期 2023 年 3 月 4 日

1. 给定二维向量  $\mathbf{u} = (2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 4)$ :

- 请描述所有满足  $c + d = 1$  的线性组合  $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$  在平面上的图像。
- 如果线性组合  $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$  描述的是图中的阴影部分, 请给出  $c$  和  $d$  所满足的条件。



2. 请证明点积的如下性质:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ .
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ .

3. 是否存在 3 个二维向量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  使得  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$ ,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} < 0$ ? 如果存在, 请给出一个例子; 如果不存在, 请证明之。

4. 考虑一个如下的例子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 给出一组非零的满足上述方程的解  $x_1, x_2, x_3$ 。
- 令该矩阵的列向量为  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ , 根据你的解来解释一下上述式子。
- 令该矩阵的行组成向量为  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ , 其构成一个平面, 请解释为什么你给出的解  $(x_1, x_2, x_3)$  和着个平面垂直。

5. 请证明如果  $(a, b)$  是  $(c, d)$  的一个倍数，那么  $(a, c)$  是  $(b, d)$  的一个倍数。并借此揭示对于如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

如果其两列的对应向量组成的平面是一个直线，那么其两行的对应向量组成的平面也是一个直线。