

第一次作业-solution

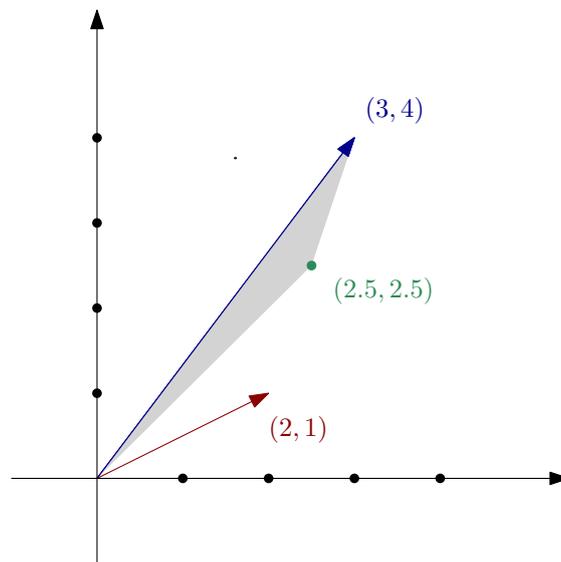
LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 3 月 25 日

截止日期 2023 年 3 月 4 日

1. 给定二维向量 $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$:

- 请描述所有满足 $c + d = 1$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 在平面上的图像。
- 如果线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 描述的是图中的阴影部分, 请给出 c 和 d 所满足的条件。



解答.

- 满足 $c + d = 1$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 在平面上的图像是过 $(3, 4)$ 和 $(2, 1)$ 的一条直线。
- 图中阴影部分对应的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 满足 $c + d \leq 1$ 并且 $d \geq c \geq 0$ 。

□

Remark 0.1

我们给第二问再给出两个证明:

- 事实上任何一个阴影的点必须满足如下的条件:

$$\exists, \lambda, \eta \in [0, 1], \text{ s.t. } \lambda\mathbf{v} + \eta(\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{u}) \text{ and } \lambda + \eta \leq 1$$

从而我们有:

$$d + c = \lambda + \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta \leq 1, \quad d = \lambda + \frac{1}{2}\eta \geq \frac{1}{2}\eta = c, \quad c = \frac{1}{2}\eta \geq 0$$

上述不等式等号成立的条件为阴影部分的边界。

- 我们再尝试使用线性规划的方法证明，令这个点为 (x, y) ，则有：

$$\begin{cases} 3y - 4x \leq 0 \\ y - x \geq 0 \\ y - 3x + 5 \geq 0 \\ x = 2c + 3d \\ y = c + 4d \end{cases}$$

从而我们有：

$$\begin{cases} c \geq 0 \\ d - c \geq 0 \\ c + d \leq 1 \end{cases}$$

2. 请证明点积的如下性质：

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

解答.

- 由定义：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

- 由定义：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + \cdots + u_n(v_n + w_n) \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) + (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

- 由定义：

$$\begin{aligned} (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2 + \cdots + (cu_n)v_n \\ &= c(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

□

3. 是否存在 3 个二维向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 使得 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} < 0$? 如果存在，请给出一个例子；如果不存在，请证明之。

解答. 存在，只要令其夹角都大于 90° 即可。例如，令 $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 3)$, $\mathbf{w} = (-1, -1)$ 。 □

Remark 0.2

事实上, 4 个是不可行的。一般来说, 对于 R^n 的空间, 我们可以找到 $n + 1$ 个向量, 使得它们的点积都是负数, 而 $n + 2$ 个则不行。

4. 考虑一个如下的例子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 给出一组非零的满足上述方程的解 x_1, x_2, x_3 。
- 令该矩阵的列向量为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, 根据你的解来解释一下上述式子。
- 令该矩阵的行组成向量为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, 其构成一个平面, 请解释为什么你给出的解 (x_1, x_2, x_3) 和着个平面垂直。

解答.

- $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.
- 其对应的线性组合为 $\mathbf{0}$, 即: $x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + x_3\mathbf{s}_3 = \mathbf{0}$ 。
- 由乘法定义, 对其每一行 \mathbf{r}_i 都有 $\mathbf{r}_i \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$, 从而 (x_1, x_2, x_3) 与 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 均垂直, 即和整个平面垂直。

□

5. 请证明如果 (a, b) 是 (c, d) 的一个倍数, 那么 (a, c) 是 (b, d) 的一个倍数。并借此揭示对于如下矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

如果其两列的对应向量组成的平面是一个直线, 那么其两行的对应向量组成的平面也是一个直线。

解答. 如果 (a, b) 是 (c, d) 的一个倍数, 那么存在一个数 k 使得 $(a, b) = k(c, d)$, 即: $a = kc$ 且 $b = kd$ 。注意到:

$$\frac{a}{b} = \frac{kc}{kd} = \frac{c}{d}$$

所以 (a, c) 也是 (b, d) 的一个倍数。

对于上述矩阵而言, 如果其两列的对应向量组成的平面是一个直线, 那么存在一个数 k 使得 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, 从而 $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = k' \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ 对于某个 k' 成立, 即其两行的对应向量组成的平面也是一个直线。

□