第二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 3 月 16 日

1. 计算下列式子:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

解答.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,1,0,0)\cdot(1,2,3,4) \\ (1,2,1,0)\cdot(1,2,3,4) \\ (0,1,2,1)\cdot(1,2,3,4) \\ (0,0,1,2)\cdot(1,2,3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}$

□

Remark 0.1

我们分别用行和列的视角来计算了两道题的结果，其中第二问也可以尝试用分块矩阵的方法来计算。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}$$

2. 求出满足下列条件的矩阵 A:

- $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$, 可以看到这个矩阵的效果是将二维平面上的点绕原点逆时针旋转 90 度。
- $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z+x \end{bmatrix}$.

解答.

(1) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，其可以理解成两行对换，然后第二行取负。

(2) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，其可以理解成第三行加上了原来的第一行。

□

3. 计算下列矩阵的乘法：

- $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&1\\7&4&0\end{bmatrix}$

解答.

(1) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&1\\7&4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\6&2&-3\end{bmatrix}$

□

Remark 0.2

可以直接计算，也可以注意到形如如下的矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

左乘可以理解成将第三行加到第一行上，右乘可以理解成将第三列加到第一列上。

4. 对下列矩阵进行消元法，其最终的上三角形系统 $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 是什么？并给出相应的解。

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}$$

解答. 对其进行消元法最后得到的上三角形系统为：

$$U\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2&3\\0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\15\end{bmatrix}$$

从而可得其解 $(x_1,x_2)=(5,-3)$ □

5. 证明矩阵的乘法满足结合律，即: $(AB)C = A(BC)$.

解答. 不妨令 A, B, C 分别为 $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ 的矩阵，则记 $D=(AB)C$, $E=A(BC)$，D, E 显然都是 $m\times q$ 的矩阵。从而对于任意的 $i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,q\}$，有:

$$\begin{aligned}
D(i,j) &= \sum_{k=1}^{p} AB(i,k)C(k,j)\\
&= \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{n} A(i,l)B(l,k))C(k,j)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} A(i,l)B(l,k)C(k,j)\\
E(i,j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)BC(k,j)\\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)(\sum_{l=1}^{p} B(k,l)C(l,j))\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} A(i,k)B(k,l)C(l,j)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} A(i,l)B(l,k)C(k,j)
\end{aligned}$$

即：$D(i,j)=E(i,j)$，从而 $D=E$，即 $(AB)C=A(BC)$. □

6. 证明 $(A+B)^2$ 和 $A^2+2AB+B^2$ 是不等的，这里:

$$A=\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

进一步探讨 $(A+B)(A+B)$ 究竟等于什么?

解答. 经过计算可得:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= \begin{bmatrix}3 & b+2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & b+2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 4b+8\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
A^2+2AB+B^2 &= \begin{bmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 2b+8\\ 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

从而 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$，事实上我们注意到:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}2 & 2b+2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵乘法的交换律并不成立，所以 $(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$。 □

7. 假设你求解方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，分别令 $\mathbf{b}$ 是如下特殊的值求得对应的解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$（假设总是有解的）:

$$A\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad A\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad A\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

令 $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$ 是由 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 组成的矩阵，计算 AX。

（事实上，这是一种用来求 A 逆矩阵的方法。）

解答. 注意到

$$AX = A\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $AX = I$。 □

Remark 0.3

事实上，假设 A 是方阵，那么 $X = A^{-1}$；若 A 不是方阵，那么则获得使其 $AX = I$ 的矩阵 X，但此时需要注意的是 XA 不等于 I，事实上 XA 甚至都不一定合法。