第二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 3 月 18 日

1. 计算下列式子:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

解答.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,1,0,0)\cdot(1,2,3,4) \\ (1,2,1,0)\cdot(1,2,3,4) \\ (0,1,2,1)\cdot(1,2,3,4) \\ (0,0,1,2)\cdot(1,2,3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}$

□

Remark 0.1

我们分别用行和列的视角来计算了两道题的结果，其中第二问也可以尝试用分块矩阵的方法来计算。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}$$

2. 求出满足下列条件的矩阵 A:

- $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$, 可以看到这个矩阵的效果是将二维平面上的点绕原点逆时针旋转 90 度。
- $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z+x \end{bmatrix}$.

解答.

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，其可以理解成两行对换，然后第二行取负。

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其可以理解成第三行加上了原来的第一行。

□

3. 计算下列矩阵的乘法：

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

解答.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

□

Remark 0.2

可以直接计算，也可以注意到形如如下的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左乘可以理解成将第三行加到第一行上，右乘可以理解成将第三列加到第一列上。

4. 对下列矩阵进行消元法，其最终的上三角形系统 $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 是什么？并给出相应的解。

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

解答. 对其进行消元法最后得到的上三角形系统为：

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

从而可得其解 $(x_1, x_2) = (5, -3)$ □

5. 证明矩阵的乘法满足结合律，即: $(AB)C = A(BC)$.

解答. 不妨令 A, B, C 分别为 $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ 的矩阵，则记 $D = (AB)C$, $E = A(BC)$，D, E 显然都是 $m \times q$ 的矩阵。从而对于任意的 $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, q\}$，有:

$$\begin{aligned}
D(i,j) &= \sum_{k=1}^{p} AB(i,k)C(k,j) \\
&= \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{n} A(i,l)B(l,k))C(k,j) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} A(i,l)B(l,k)C(k,j) \\
E(i,j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)BC(k,j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)(\sum_{l=1}^{p} B(k,l)C(l,j)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} A(i,k)B(k,l)C(l,j) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} A(i,l)B(l,k)C(k,j)
\end{aligned}$$

即: $D(i,j) = E(i,j)$，从而 $D = E$，即 $(AB)C = A(BC)$. □

Remark 0.3

我们也可以用分块的思想来证明，将 A, B, C 作如下的分解:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p \end{bmatrix}$$

即将 B 写成列向量的形式 ($\mathbf{b}_i$ 是 $n \times 1$ 的), C 写成行向量的形式 ($\mathbf{c}_i$ 是 $1 \times p$ 的)，则有:

$$(AB)C = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p \end{bmatrix} = (A\mathbf{b}_1)\mathbf{c}_1 + \cdots + (A\mathbf{b}_p)\mathbf{c}_p = A\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 + \cdots A\mathbf{b}_p\mathbf{c}_p$$

$$A(BC) = A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_p \end{bmatrix}\right) = A(\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 + \cdots + \mathbf{b}_p\mathbf{c}_p) = A\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 + \cdots A\mathbf{b}_p\mathbf{c}_p$$

请注意:

- 请仔细核对每个矩阵乘法对应的形式是否合法。

- 请注意区别：

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}, \qquad A\mathbf{b}_1 + \cdots + A\mathbf{b}_p$$

前者是一个 $m \times p$ 的矩阵，后者是一个 $n \times 1$ 的矩阵。

6. 证明 $(A+B)^2$ 和 $A^2 + 2AB + B^2$ 是不等的，这里：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步探讨 $(A+B)(A+B)$ 究竟等于什么？

解答. 经过计算可得：

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & b+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & b+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4b+8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2b+8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$，事实上我们注意到：

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; BA = \begin{bmatrix} 2 & 2b+2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法的交换律并不成立，所以 $(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$。 □

7. 假设你求解方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，分别令 $\mathbf{b}$ 是如下特殊的值求得对应的解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$（假设总是有解的）：

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令 $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$ 是由 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 组成的矩阵，计算 AX。

（事实上，这是一种用来求 A 逆矩阵的方法。）

解答. 注意到

$$AX = A\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $AX = I$。 □

Remark 0.4

事实上，假设 A 是方阵，那么 $X = A^{-1}$；若 A 不是方阵，那么则获得使其 $AX = I$ 的矩阵 X，但此时需要注意的是 XA 不等于 I，事实上 XA 甚至都不一定合法。