第三次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 3 月 11 日

截止日期 2023 年 3 月 18 日

1. 判断下列语句的真假：
   - 如果矩阵 A^2 是存在的，那么 A 是一个方阵。
   - 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 A 和 B 都是方阵。
   - 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 AB 和 BA 都是方阵。
   - 如果 $AB = B$，那么 $A = I$。
2. 利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$
3. - 证明：如果 A 是一个可逆矩阵并且 $AB = AC$，那么 $B = C$。
   - 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，请给出两个不同的矩阵 B, C 使得 $AB = AC$。
   - 请给出一个例子说明，即使 A, B 是一个可逆矩阵，$A + B$ 不一定是可逆的。
4. 如果 3×3 的矩阵 A 满足：
$$row\ 1 + row\ 2 = row\ 3$$
   即 A 的第三行是它的前两行的和。证明 A 不是一个可逆矩阵。

   hint: 想办法说明：$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 并不是对所有的 $\mathbf{b}$ 都有解。
5. 假设 A, B 都是方阵，利用 $A(I + BA) = (I + AB)A$ 这一等式证明，如果 A 是一个可逆矩阵，那么 $I + AB$ 和 $I + BA$ 要么同时可逆，要么同时不可逆。

   事实上，该问题并不需要 A 是可逆的这一条件，但需要其他方式去处理
6. 试证明，如果 P 是一个置换矩阵，总存在一个正整数 n 使得 $P^n = I$。

   hint: 思考一下置换矩阵的乘积是什么。
7. 考虑这样一个问题：假设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times p$ 的矩阵，C 是 $p \times q$ 的矩阵.
   - 计算 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 分别需要多少次乘法？
   - 如果 $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} < \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$，那么哪一个计算方法更快？你也可以由这个例子看出，当多个矩阵相乘时，进行运算的顺序会影响运算的效率。
   - 现在假设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 都是 n 维列向量，请给出你计算 $\mathbf{u}^T\mathbf{v}\mathbf{w}^T$ 的顺序并解释原因。(即 $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 还是 $\mathbf{u}^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T)$?)