线性代数 For CS WEEK 3

# 第三次作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 7 日

1. 判断下列语句的真假：

- 如果矩阵 $A^2$ 是存在的，那么 $A$ 是一个方阵。
- 如果矩阵 $AB$ 和 $BA$ 都是存在的，那么 $A$ 和 $B$ 都是方阵。
- 如果矩阵 $AB$ 和 $BA$ 都是存在的，那么 $AB$ 和 $BA$ 都是方阵。
- 如果 $AB = B$，那么 $A = I$。

**解答.**

(1) 对的，因为假设 $A$ 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则 $A^2$ 存在意味着 $m = n$.

(2) 错的，比如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则我们有：$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) 对的，令 $A$ 是 $m \times n$ 的矩阵，则由 $AB, BA$ 都是存在的，则可得 $B$ 是 $n \times m$ 的矩阵，从而 $AB$ 是 $m \times m$ 的方阵，$BA$ 是 $n \times n$ 的矩阵。

(4) 错的，考察如下的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $AB = B$，但 $A \neq I$.

□

**Remark 0.1**

第 4 个例子也说明矩阵乘法是没有消去律的（无论是左或者右），即一般情况下 $AB = AC$ 并不能推出 $B = C$，但是下述的第三题说明如果 $A$ 是一个可逆矩阵，那么 $AB = AC$ 就可以推出 $B = C$.

2. 利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

**解答**. 记 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则我们有:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} O & OO + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + OO & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} O + O \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & 18 & 15 \\ 16 & 12 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

3. 
   - 证明：如果 $A$ 是一个可逆矩阵并且 $AB = AC$，那么 $B = C$。
   - 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，请给出两个不同的矩阵 $B, C$ 使得 $AB = AC$。
   - 请给出一个例子说明，即使 $A, B$ 是一个可逆矩阵，$A + B$ 不一定是可逆的。

**解答**.

(1) 由于 $A$ 是一个可逆矩阵，所以 $A^{-1}$ 是存在的，所以我们有:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

(2) 令:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(3) 令:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则 $A, B$ 都是可逆矩阵，但是 $A + B = O$ 不是可逆的。

□

4. 如果 $3 \times 3$ 的矩阵 $A$ 满足:

$$row\ 1 + row\ 2 = row\ 3$$

即 $A$ 的第三行是它的前两行的和。证明 $A$ 不是一个可逆矩阵。

hint: 想办法说明: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 并不是对所有的 $\mathbf{b}$ 都有解。

**解答**. 令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，我们证明 $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 没有解。反设其方程存在一组解 $(x_1, x_2, x_3)$，则我们有：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 1 \end{aligned}$$

由于 $A$ 的第三行是它的前两行的和，所以我们有：

$$\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

矛盾。 □

5. 假设 $A, B$ 都是方阵，利用 $A(I + BA) = (I + AB)A$ 这一等式证明，如果 $A$ 是一个可逆矩阵，那么 $I + AB$ 和 $I + BA$ 要么同时可逆，要么同时不可逆。

   事实上，该问题并不需要 $A$ 是可逆的这一条件，但需要其他方式去处理

   **解答**.

$$\begin{aligned} I + AB\text{可逆} &\Leftrightarrow (I + AB)^{-1}A(I + BA) = (I + AB)^{-1}(I + AB)A \\ &\Leftrightarrow (I + AB)^{-1}A(I + BA) = A \\ &\Leftrightarrow A^{-1}(I + AB)^{-1}A(I + BA) = A^{-1}A = I \end{aligned}$$

   另一方面，由于 $A$ 是可逆的从而：$I + BA = A^{-1}(I + AB)A$，所以有：

$$(I + BA)A^{-1}(I + AB)^{-1}A = A^{-1}(I + AB)AA^{-1}(I + AB)^{-1}A = I$$

   从而 $I + BA$ 可逆，反之亦然。 □

6. 试证明，如果 $P$ 是一个置换矩阵，总存在一个正整数 $n$ 使得 $P^n = I$。

   hint: 思考一下置换矩阵的乘积是什么。

   **解答**. 注意到置换矩阵的乘积依旧是置换矩阵，而 $n \times n$ 的置换矩阵是有限的，从而必然存在 $0 < m < n \in \mathbb{N}$ 使得：

$$P^m = P^n = P^{n-m}P^m$$

   由于 $P^m$ 是可逆矩阵，从而我们有：

$$P^{n-m} = I$$

   □

7. 考虑这样一个问题：假设 $A$ 是 $m \times n$ 的矩阵，$B$ 是 $n \times p$ 的矩阵，$C$ 是 $p \times q$ 的矩阵.

   - 计算 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 分别需要多少次乘法?

- 如果 $\frac{1}{n}+\frac{1}{q}<\frac{1}{m}+\frac{1}{p}$，那么哪一个计算方法更快？你也可以由这个例子看出，当多个矩阵相乘时，进行运算的顺序会影响运算的效率。
- 现在假设 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 都是 $n$ 维列向量，请给出你计算 $\mathbf{u}^T\mathbf{v}\mathbf{w}^T$ 的顺序并解释原因。(即 $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 还是 $\mathbf{u}^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T)$?)

**解答**.

(1) 注意到如果 $m\times n$ 的矩阵和 $n\times q$ 的矩阵相乘得到 $m\times q$ 的矩阵，其中每个数都要经历 $n$ 次乘法，一共 $mq$ 个数，所以一共需要 $mnq$ 次乘法，从而

- 计算 $BC$ 需要 $npq$ 次乘法，计算 $A$ 和 $(BC)$ 的乘法需要 $mnq$ 次乘法，因此计算 $A(BC)$ 一共需要 $npq+mnq$ 次乘法。
- 计算 $AB$ 需要 $mpn$ 次乘法，计算 $(AB)$ 和 $C$ 的乘法需要 $mpq$ 次乘法，因此计算 $(AB)C$ 一共需要 $mpn+mpq$ 次乘法。

(2) 对上述不等式两边同时乘以 $mnpq$，则我们有：

$$mpq+mnp<npq+mnq$$

从而在上述条件中，$(AB)C$ 计算的乘法次数更少，从而更快。

(3) 由上述讨论可以看出：

- $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 需要 $1\cdot n\cdot 1+1\cdot 1\cdot n=2n$ 次乘法。
- $\mathbf{u}^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T)$ 需要 $1\cdot n\cdot n+n\cdot n\cdot 1=2n^2$ 次乘法。

从而 $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 更快。

□