

第三次作业

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 3 月 11 日

截止日期 2023 年 3 月 18 日

1. 判断下列语句的真假:

- 如果矩阵 A^2 是存在的, 那么 A 是一个方阵。
- 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的, 那么 A 和 B 都是方阵。
- 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的, 那么 AB 和 BA 都是方阵。
- 如果 $AB = B$, 那么 $A = I$ 。

2. 利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. 尝试寻找到所有的矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 使得 $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A$ 4. • 证明: 如果 A 是一个可逆矩阵并且 $AB = AC$, 那么 $B = C$ 。• 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 请给出两个不同的矩阵 B, C 使得 $AB = AC$ 。• 请给出一个例子说明, 即使 A, B 是一个可逆矩阵, $A + B$ 不一定是可逆的。5. 如果 3×3 的矩阵 A 满足:

$$\text{row } 1 + \text{row } 2 = \text{row } 3$$

即 A 的第三行是它的前两行的和。证明 A 不是一个可逆矩阵。hint: 想办法说明: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 并不是对所有的 \mathbf{b} 都有解。6. 假设 A, B 都是方阵, 利用 $A(I + BA) = (I + AB)A$ 这一等式证明, 如果 A 是一个可逆矩阵, 那么 $I + AB$ 和 $I + BA$ 要么同时可逆, 要么同时不可逆。事实上, 该问题并不需要 A 是可逆的这一条件, 但需要其他方式去处理7. 考虑这样一个问题: 假设 A 是 $m \times n$ 的矩阵, B 是 $n \times p$ 的矩阵, C 是 $p \times q$ 的矩阵。

- 计算 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 分别需要多少次乘法?
- 如果 $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} < \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$, 那么哪一个计算方法更快? 你也可以由这个例子看出, 当多个矩阵相乘时, 进行运算的顺序会影响运算的效率。
- 现在假设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 都是 n 维列向量, 请给出你计算 $\mathbf{u}^T \mathbf{v} \mathbf{w}^T$ 的顺序并解释原因。(即 $(\mathbf{u}^T \mathbf{v}) \mathbf{w}^T$ 还是 $\mathbf{u}^T (\mathbf{v} \mathbf{w}^T)$?)