第三次作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2024 年 4 月 7 日

1. 判断下列语句的真假：
   - 如果矩阵 A^2 是存在的，那么 A 是一个方阵。
   - 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 A 和 B 都是方阵。
   - 如果矩阵 AB 和 BA 都是存在的，那么 AB 和 BA 都是方阵。
   - 如果 $AB = B$，那么 $A = I$。

解答.

(1) 对的，因为假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则 A^2 存在意味着 $m = n$.

(2) 错的，比如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则我们有：$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) 对的，令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则由 AB, BA 都是存在的，则可得 B 是 $n \times m$ 的矩阵，从而 AB 是 $m \times m$ 的方阵，BA 是 $n \times n$ 的矩阵。

(4) 错的，考察如下的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $AB = B$，但 $A \neq I$.

□

Remark 0.1

第 4 个例子也说明矩阵乘法是没有消去律的（无论是左或者右），即一般情况下 $AB = AC$ 并不能推出 $B = C$，但是下述的第三题说明如果 A 是一个可逆矩阵，那么 $AB = AC$ 就可以推出 $B = C$.

2. 利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

解答. 记 $O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，则我们有：

$$\begin{bmatrix}0&0&0&2\\0&0&3&0\\0&4&0&0\\5&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&0&0\\4&3&0&0\\0&0&6&5\\0&0&7&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}O & OO+\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&5\\7&6\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0&4\\5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}+OO & \begin{bmatrix}0&4\\5&0\end{bmatrix}O+O\begin{bmatrix}6&5\\7&6\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&14&12\\0&0&18&15\\16&12&0&0\\15&10&0&0\end{bmatrix}$$

□

3. 尝试寻找到所有的矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 使得 $A\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}A$

解答. 分别计算可得：

$$A\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&a+b\\c+d&c+d\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{bmatrix}$$

从而 $a=d,\ b=c$，因此所有形如 $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$ 的矩阵都满足题设条件。 □

4.
- 证明：如果 A 是一个可逆矩阵并且 $AB=AC$，那么 $B=C$。
- 令 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，请给出两个不同的矩阵 B,C 使得 $AB=AC$。
- 请给出一个例子说明，即使 A,B 是一个可逆矩阵，$A+B$ 不一定是可逆的。

解答.

(1) 由于 A 是一个可逆矩阵，所以 A^{-1} 是存在的，所以我们有：

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\Rightarrow(A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C\Rightarrow IB=IC\Rightarrow B=C$$

(2) 令：

$$B=\begin{bmatrix}1&6\\2&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&5\\1&4\end{bmatrix}$$

则我们有：

$$AB=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&9\\3&9\end{bmatrix}$$
$$AC=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&9\\3&9\end{bmatrix}$$

(3) 令：

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

则 A,B 都是可逆矩阵，但是 $A+B=O$ 不是可逆的。

$\square$

5. 如果 3×3 的矩阵 A 满足：

$$row\ 1 + row\ 2 = row\ 3$$

即 A 的第三行是它的前两行的和。证明 A 不是一个可逆矩阵。

hint: 想办法说明：$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 并不是对所有的 $\mathbf{b}$ 都有解。

解答. 令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，我们证明 $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 没有解。反设其方程存在一组解 (x_1, x_2, x_3)，则我们有：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 1 \end{aligned}$$

由于 A 的第三行是它的前两行的和，所以我们有：

$$\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

矛盾。 $\square$

6. 假设 A, B 都是方阵，利用 $A(I + BA) = (I + AB)A$ 这一等式证明，如果 A 是一个可逆矩阵，那么 $I + AB$ 和 $I + BA$ 要么同时可逆，要么同时不可逆。

事实上，该问题并不需要 A 是可逆的这一条件，但需要其他方式去处理

解答.

$$\begin{aligned} I + AB\text{可逆} &\Leftrightarrow (I + AB)^{-1}A(I + BA) = (I + AB)^{-1}(I + AB)A \\ &\Leftrightarrow (I + AB)^{-1}A(I + BA) = A \\ &\Leftrightarrow A^{-1}(I + AB)^{-1}A(I + BA) = A^{-1}A = I \end{aligned}$$

另一方面，由于 A 是可逆的从而：$I + BA = A^{-1}(I + AB)A$，所以有：

$$(I + BA)A^{-1}(I + AB)^{-1}A = A^{-1}(I + AB)AA^{-1}(I + AB)^{-1}A = I$$

从而 $I + BA$ 可逆，反之亦然。 $\square$

7. 考虑这样一个问题：假设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times p$ 的矩阵，C 是 $p \times q$ 的矩阵.

- 计算 $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 分别需要多少次乘法?
- 如果 $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} < \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$，那么哪一个计算方法更快? 你也可以由这个例子看出，当多个矩阵相乘时，进行运算的顺序会影响运算的效率。
- 现在假设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 都是 n 维列向量，请给出你计算 $\mathbf{u}^T\mathbf{v}\mathbf{w}^T$ 的顺序并解释原因。(即 $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 还是 $\mathbf{u}^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T)$?)

解答.

(1) 注意到如果 $m \times n$ 的矩阵和 $n \times q$ 的矩阵相乘得到 $m \times q$ 的矩阵，其中每个数都要经历 n 次乘法，一共 mq 个数，所以一共需要 mnq 次乘法，从而

- 计算 BC 需要 npq 次乘法，计算 A 和 (BC) 的乘法需要 mnq 次乘法，因此计算 $A(BC)$ 一共需要 $npq + mnq$ 次乘法。
- 计算 AB 需要 mpn 次乘法，计算 (AB) 和 C 的乘法需要 mpq 次乘法，因此计算 $(AB)C$ 一共需要 $mpn + mpq$ 次乘法。

(2) 对上述不等式两边同时乘以 $mnpq$，则我们有：

$$mpq + mnp < npq + mnq$$

从而在上述条件中，$(AB)C$ 计算的乘法次数更少，从而更快。

(3) 由上述讨论可以看出：

- $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 需要 $1 \cdot n \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot n = 2n$ 次乘法。
- $\mathbf{u}^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T)$ 需要 $1 \cdot n \cdot n + n \cdot n \cdot 1 = 2n^2$ 次乘法。

从而 $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}^T$ 更快。

□