

## 第四次作业

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 3 月 18 日

**截止日期** 2023 年 3 月 25 日

1. 当  $A$  是下列矩阵时, 分别计算  $A^T, A^{-1}, (A^T)^{-1}, (A^{-1})^T$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

2. 请证明:  $A^2 = O$  是可能的, 但是  $A^T A = O$  是不可能的, 这里  $O$  是全零矩阵。

3. • 请给出一个  $3 \times 3$  的置换矩阵  $P$ , 使得  $P^3 = I$ .

• 请给出一个  $4 \times 4$  的置换矩阵  $\hat{P}$ , 使得  $\hat{P}^4 \neq I$ .

4. 假设  $n \times n$  的矩阵  $Q$  满足:  $Q^{-1} = Q^T$ :

(1) 证明  $Q$  中的列向量  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  都是单位向量, 即  $\|\mathbf{q}_i\| = 1$ .

(2) 证明  $Q$  中的列向量  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  两两正交, 即  $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$  对任意的  $i \neq j$  都成立.

(3) 令  $n = 2$ , 并且  $Q(1, 1) = \cos \theta$ , 求  $Q$ .

5. 考察集合  $\mathbb{R}^2$  和其向量加法和数乘的运算, 其构成一个向量空间:

(1) 如果我们将加法定义从  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$  修改成  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1)$ , 数乘的定义不变, 那么其是否还构成向量空间? 如果不是的话, 其违反了哪条规则。

(2) 如果我们将数乘定义  $c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$  修改成  $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$ , 加法的定义不变, 那么其是否还构成向量空间? 如果不是的话, 其违反了哪条规则。

6. 令  $V$  是一个向量空间, 其中  $\mathbf{u} \in V$ , 证明:

(1)  $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$

(2)  $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$  蕴含  $\lambda = 0$  或者  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .