第四次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 3 月 28 日

1. 当 A 是下列矩阵时，分别计算 A^T，$A^{-1}, (A^T)^{-1}, (A^{-1})^T$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

解答. 计算可得：

- $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}, \ (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}, \ (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$$
- $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}, \ (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}, \ (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

□

Remark 0.1

题目中应当加上 $c \neq 0$ 的条件，否则 A 不可逆。

2. 请证明当 A 是非零矩阵的时候，$A^2 = O$ 是可能的，但是 $A^T A = O$ 是不可能的，这里 O 是全零矩阵。

解答.

- 令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $A^2 = O$.
- 令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，且记 $A(i,j)$ 为 a_{ij}，显然也有 $A^T(j,i) = a_{ij}$。注意到对任意的 $i \in [n]$，有：

  $$A^T A(i,i) = \sum_{j=1}^{m} A^T(i,j)A(j,i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$$

  从而若 A 是非零矩阵，则至少存在一个 $a_{ij} \neq 0$，从而 $A^T A(i,i) \neq 0$，所以 $A^T A \neq O$.

□

Remark 0.2

本题一开始忘记添加了 A 是非零矩阵的条件。感谢同学的指正。

3.
   - 请给出一个 3×3 的置换矩阵 P，使得 $P^3 = I$.
   - 请给出一个 4×4 的置换矩阵 $\hat{P}$，使得 $\hat{P}^4 \neq I$.

解答.

- 令 $P=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，则 $P^3=I$.
- 令 $\hat{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，则 $\hat{P}^4\neq I$.

$\square$

Remark 0.3

本题的目的在于意识到并不是 $n\times n$ 的矩阵一定满足 $P^n=I$，而是只能证明存在一个 k 使得 $P^k=I$。完整的刻画需要一些群论的知识。

4. 假设 $n\times n$ 的矩阵 Q 满足：$Q^{-1}=Q^T$：

(1) 证明 Q 中的列向量 $\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n$ 都是单位向量，即 $\|\mathbf{q}_i\|=1$.
(2) 证明 Q 中的列向量 $\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n$ 两两正交，即 $\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j=0$ 对任意的 $i\neq j$ 都成立.
(3) 令 $n=2$，并且 $Q(1,1)=\cos\theta$，求 Q.

解答.

- 注意到：

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1&\cdots&\mathbf{q}_n\end{bmatrix}\quad\Longleftrightarrow\quad Q^T=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^T\\\vdots\\\mathbf{q}_n^T\end{bmatrix}$$

  从而由 $Q^TQ=I$ 可得：

$$\text{对任意 } i\in n \text{ 有：} 1=I(i,i)=Q^TQ(i,i)=\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_i=\|\mathbf{q}_i\|^2$$

  即：$\|\mathbf{q}_i\|=1$.
- 只需注意到对任意的 $i\neq j$ 有：

$$0=I(i,j)=Q^TQ(i,j)=\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j$$

  即：$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j=0$.
- $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\-\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$.

$\square$

Remark 0.4

关于第三问，注意到任何一个单位向量都可以表示为 $\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix}$，代入 $Q^TQ=I$ 即可得到 Q.

5. 考察集合 $\mathbb{R}^2$ 和其向量加法和数乘的运算，其构成一个向量空间:

(1) 如果我们将加法定义从 $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ 修改成 $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+1)$，数乘的定义不变，那么其是否还构成向量空间？如果不是的话，其违反了哪条规则。

(2) 如果我们将数乘定义 $c(x_1,x_2)=(cx_1,cx_2)$ 修改成 $c(x_1,x_2)=(cx_1,0)$，加法的定义不变，那么其是否还构成向量空间？如果不是的话，其违反了哪条规则。

解答.

- 其不构成向量空间，我们作为一个示例，考察下所有的规则：
  (1) 加法依旧是封闭的，$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+1)\in\mathbb{R}^2$.
  (2) 数乘依旧也是封闭的，因为定义未改变。
  (3) 加法的交换律依旧成立，即：

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+1)=(y_1+x_1,y_2+x_2+1)=(y_1,y_2)+(x_1,x_2)$$

  (4) 加法的结合律依旧成立，即：

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)+[(y_1,y_2)+(z_1,z_2)]&=(x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2+1)\\&=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2+2)\\&=(x_1+y_1,x_2+y_2+1)+(z_1,z_2)\\&=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)+(z_1,z_2)\end{aligned}$$

  (5) 加法的零元存在，此时 $\mathbf{0}=(0,-1)$:

$$(x_1,x_2)+\mathbf{0}=(x_1,x_2)+(0,-1)=(x_1+0,x_2-1+1)=(x_1,x_2)$$

  (6) 加法的逆元存在，此时为 $(-x_1,-x_2)$:

$$(x_1,x_2)+(-x_1,-x_2)=(x_1-x_1,x_2-x_2)=(0,-1)=\mathbf{0}$$

  (7) $1\cdot(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$.
  (8) $(c_1\cdot c_2)\cdot(x_1,x_2)=c_1\cdot(c_2\cdot(x_1,x_2))$.
  (9) 数乘的右分配律并不成立，这是因为：

$$\begin{aligned}c\cdot[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]=c\cdot(x_1+y_1,x_2+y_2+1)=(cx_1+cy_1,cx_2+cy_2+c)\\c\cdot(x_1,x_2)+c\cdot(y_1,y_2)=(cx_1,cx_2)+(cy_1,cy_2)=(cx_1+cy_1,cx_2+cy_2+1)\end{aligned}$$

  (10) 数乘的左分配律并不成立，这是因为：

$$\begin{aligned}(c_1+c_2)\cdot(x_1,y_1)=((c_1+c_2)x_1,(c_1+c_2)y_1)=(c_1x_1+c_2x_1,c_1y_1+c_2y_1)\\c_1(x_1,y_1)+c_2(x_1,y_1)=(c_1x_1,c_1y_1)+(c_2x_1,c_2y_1)=(c_1x_1+c_2x_1,c_1y_1+c_2y_1+1)\end{aligned}$$

- 其不构成一个向量空间，事实上其不满足下列的规则：

$$1\cdot(x_1,x_2)=(x_1,0)\neq(x_1,x_2)$$

  事实上，该定义下的运算也只不满足这一性质。

□

6. 令 V 是一个向量空间，其中 $\mathbf{u}\in V$, 证明：

(1) $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$

(2) $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 蕴含 $\lambda = 0$ 或者 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

解答.

- 注意到：
$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
所以 $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$.
- 若 $\lambda \neq 0$，则：
$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda)\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{u}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
从而：
$$\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0\text{或者}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

□