线性代数 For EI　　Lecture 4

第四次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 3 月 18 日

截止日期　2023 年 3 月 25 日

1. 当 A 是下列矩阵时，分别计算 A^T，$A^{-1}, (A^T)^{-1}, (A^{-1})^T$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

2. 请证明：$A^2 = O$ 是可能的，但是 $A^T A = O$ 是不可能的，这里 O 是全零矩阵。

3.
   - 请给出一个 3×3 的置换矩阵 P, 使得 $P^3 = I$.
   - 请给出一个 4×4 的置换矩阵 $\hat{P}$, 使得 $\hat{P}^4 \neq I$.

4. 假设 $n \times n$ 的矩阵 Q 满足：$Q^{-1} = Q^T$：

   (1) 证明 Q 中的列向量 $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ 都是单位向量，即 $\|\mathbf{q}_i\| = 1$.

   (2) 证明 Q 中的列向量 $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ 两两正交，即 $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$ 对任意的 $i \neq j$ 都成立.

   (3) 令 $n = 2$，并且 $Q(1,1) = \cos\theta$，求 Q.

5. 考察集合 $\mathbb{R}^2$ 和其向量加法和数乘的运算，其构成一个向量空间:

   (1) 如果我们将加法定义从 $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ 修改成 $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1)$，数乘的定义不变，那么其是否还构成向量空间？如果不是的话，其违反了哪条规则。

   (2) 如果我们将数乘定义 $c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$ 修改成 $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$，加法的定义不变，那么其是否还构成向量空间？如果不是的话，其违反了哪条规则。

6. 令 $M = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 是所有 2×2 矩阵构成的向量空间：

   - 请给出 M 的一个子空间，其包含 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 但不包含 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   - 如果 M 的一个子空间同时包含 A 和 B，则单位矩阵 I 是否在这个子空间中？

7. 下列 $\mathbb{R}^3$ 的子集中，哪些是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间?

   (1) 由所有满足 $b_1 = b_2$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。

   (2) 由所有满足 $b_1 = 1$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。

   (3) 所有满足 $b_1 b_2 b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

   (4) 所有 $(1, 4, 0)$ 和 $(2, 2, 2)$ 的线性组合组成的向量集合。

   (5) 所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

   (6) 所有满足 $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。