

第四次作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2024 年 3 月 28 日

1. 当 A 是下列矩阵时, 分别计算 $A^T, A^{-1}, (A^T)^{-1}, (A^{-1})^T$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

解答. 计算可得:

•

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

•

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

□

Remark 0.1

题目中应当加上 $c \neq 0$ 的条件, 否则 A 不可逆。

2. 请证明当 A 是非零矩阵的时候, $A^2 = O$ 是可能的, 但是 $A^T A = O$ 是不可能的, 这里 O 是全零矩阵。

解答.

• 令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^2 = O$.

• 令 A 是 $m \times n$ 的矩阵, 且记 $A(i, j)$ 为 a_{ij} , 显然也有 $A^T(j, i) = a_{ij}$. 注意到对任意的 $i \in [n]$, 有:

$$A^T A(i, i) = \sum_{j=1}^m A^T(i, j) A(j, i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$$

从而若 A 是非零矩阵, 则至少存在一个 $a_{ij} \neq 0$, 从而 $A^T A(i, i) \neq 0$, 所以 $A^T A \neq O$.

□

Remark 0.2

本题一开始忘记添加了 A 是非零矩阵的条件. 感谢同学的指正。

3. • 请给出一个 3×3 的置换矩阵 P , 使得 $P^3 = I$.
• 请给出一个 4×4 的置换矩阵 \hat{P} , 使得 $\hat{P}^4 \neq I$.

解答.

- 令 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $P^3 = I$.
- 令 $\hat{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\hat{P}^4 \neq I$.

□

Remark 0.3

本题的目的在于意识到并不是 $n \times n$ 的矩阵一定满足 $P^n = I$, 而是只能证明存在一个 k 使得 $P^k = I$. 完整的刻画需要一些群论的知识。

4. 假设 $n \times n$ 的矩阵 Q 满足: $Q^{-1} = Q^T$:

- (1) 证明 Q 中的列向量 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ 都是单位向量, 即 $\|\mathbf{q}_i\| = 1$.
- (2) 证明 Q 中的列向量 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ 两两正交, 即 $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$ 对任意的 $i \neq j$ 都成立.
- (3) 令 $n = 2$, 并且 $Q(1, 1) = \cos \theta$, 求 Q .

解答.

- 注意到:

$$Q = [\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \mathbf{q}_n] \iff Q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix}$$

从而由 $Q^T Q = I$ 可得:

$$\text{对任意 } i \in n \text{ 有: } 1 = I(i, i) = Q^T Q(i, i) = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i = \|\mathbf{q}_i\|^2$$

即: $\|\mathbf{q}_i\| = 1$.

- 只需注意到对任意的 $i \neq j$ 有:

$$0 = I(i, j) = Q^T Q(i, j) = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j$$

即: $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$.

- $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$.

□

Remark 0.4

关于第三问, 注意到任何一个单位向量都可以表示为 $\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$, 代入 $Q^T Q = I$ 即可得到 Q .

5. 考察集合 \mathbb{R}^2 和其向量加法和数乘的运算, 其构成一个向量空间:

- (1) 如果我们将加法定义从 $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ 修改成 $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1)$, 数乘的定义不变, 那么其是否还构成向量空间? 如果不是的话, 其违反了哪条规则。
- (2) 如果我们将数乘定义 $c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$ 修改成 $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$, 加法的定义不变, 那么其是否还构成向量空间? 如果不是的话, 其违反了哪条规则。

解答.

- 其不构成向量空间, 我们作为一个示例, 考察下所有的规则:

(1) 加法依旧是封闭的, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1) \in \mathbb{R}^2$.

(2) 数乘依旧也是封闭的, 因为定义未改变。

(3) 加法的交换律依旧成立, 即:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2 + 1) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$$

(4) 加法的结合律依旧成立, 即:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2 + 1) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2 + 2) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1) + (z_1, z_2) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) + (z_1, z_2) \end{aligned}$$

(5) 加法的零元存在, 此时 $\mathbf{0} = (0, -1)$:

$$(x_1, x_2) + \mathbf{0} = (x_1, x_2) + (0, -1) = (x_1 + 0, x_2 - 1 + 1) = (x_1, x_2)$$

(6) 加法的逆元存在, 此时为 $(-x_1, -x_2)$:

$$(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0) = \mathbf{0}$$

(7) $1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

(8) $(c_1 \cdot c_2) \cdot (x_1, x_2) = c_1 \cdot (c_2 \cdot (x_1, x_2))$.

(9) 数乘的右分配律并不成立, 这是因为:

$$\begin{aligned} c \cdot [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] &= c \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1) = (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2 + c) \\ c \cdot (x_1, x_2) + c \cdot (y_1, y_2) &= (cx_1, cx_2) + (cy_1, cy_2) = (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2 + 1) \end{aligned}$$

(10) 数乘的左分配律并不成立, 这是因为:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) \cdot (x_1, y_1) &= ((c_1 + c_2)x_1, (c_1 + c_2)y_1) = (c_1x_1 + c_2x_1, c_1y_1 + c_2y_1) \\ c_1(x_1, y_1) + c_2(x_1, y_1) &= (c_1x_1, c_1y_1) + (c_2x_1, c_2y_1) = (c_1x_1 + c_2x_1, c_1y_1 + c_2y_1 + 1) \end{aligned}$$

- 其不构成一个向量空间, 事实上其不满足下列的规则:

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$$

事实上, 该定义下的运算也只不满足这一性质。

□

6. 令 $M = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 是所有 2×2 矩阵构成的向量空间:

- 请给出 M 的一个子空间, 其包含 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 但不包含 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- 如果 M 的一个子空间同时包含 A 和 B , 则单位矩阵 I 是否在这个子空间中?

解答.

- 令 $S = \{N \mid N = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$, 则 S 是 M 的一个子空间, 且 $A \in S$ 但 $B \notin S$.
- 注意到: $I = A + (-1)B$, 所以 I 在这个子空间中。

□

7. 下列 \mathbb{R}^3 的子集中, 哪些是 \mathbb{R}^3 的子空间?

- (1) 由所有满足 $b_1 = b_2$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。
- (2) 由所有满足 $b_1 = 1$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。
- (3) 所有满足 $b_1 b_2 b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。
- (4) 所有 $(1, 4, 0)$ 和 $(2, 2, 2)$ 的线性组合组成的向量集合。
- (5) 所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。
- (6) 所有满足 $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

解答.

- (1) 其集合 S 是一个子空间, 因为对于任意的 $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \in S$ 有:

$$(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \in S, \lambda(b_1, b_2, b_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) \in S$$

- (2) 其集合 S 不是一个子空间, 因为 $(1, 1, 0) \in S$ 但是 $2(1, 1, 0) = (2, 2, 0) \notin S$.
- (3) 其集合 S 不是一个子空间, 因为 $(1, 1, 0), (0, 0, 1) \in S$ 但是 $(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \notin S$.
- (4) 其集合 S 是一个子空间。
- (5) 其集合 S 是一个子空间。
- (6) 其集合 S 不是一个子空间, 因为 $(1, 2, 3) \in S$ 但是 $(-1)(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \notin S$.

□