线性代数 For CS　　　　Lecture 5

第五次作业

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 3 月 29 日

截止日期　2023 年 4 月 1 日

1. 下列 $\mathbb{R}^3$ 的子集中，哪些是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间？

   (1) 由所有满足 $b_1 = b_2 = b_3$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。

   (2) 由所有满足 $b_1 = 100$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。

   (3) 所有满足 $b_1 b_2 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

   (4) 所有 $(1, 4, 0)$ 和 $(2, 2, 6)$ 的线性组合组成的向量集合。

   (5) 所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

2. 描述包含下列矩阵的最小子空间：

   (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. 矩阵 A 的列空间的定义：

   Definition 0.1

   令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则矩阵 A 的列空间定义为：$C(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$。

   即矩阵 A 的列空间是由其所有列向量生成的一个在 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。回顾我们在矩阵乘法中提到：

   AB 中的每一列都是 A 的列的线性组合。

   这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。

4. 找出下列列向量中，线性无关的向量的最大个数：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. 请找出下列 $\mathbb{R}^4$ 的子空间的一组基：

   (1) 由所有满足 $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ 的向量 (b_1, b_2, b_3, b_4) 组成的集合。

   (2) 由所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3, b_4) 组成的集合。

(3) 由所有 $(1,1,0,0)$ 和 $(1,0,1,1)$ 的线性组合组成的向量集合

6. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种。现在考察在 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个“向量”，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题：

   (1) 证明除单位矩阵 I 外的 5 个置换矩阵是线性无关的。

   (2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 I。