第五次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 1 日

1. 下列 $\mathbb{R}^3$ 的子集中，哪些是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间?

   (1) 由所有满足 $b_1 = b_2 = b_3$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。
   (2) 由所有满足 $b_1 = 100$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的平面。
   (3) 所有满足 $b_1 b_2 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。
   (4) 所有 $(1, 4, 0)$ 和 $(2, 2, 6)$ 的线性组合组成的向量集合。
   (5) 所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3) 组成的集合。

   解答.

   (1) 其集合 S 是一个子空间，因为对于任意的 $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \in S$ 有:

   $$(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \in S,\ \lambda(b_1, b_2, b_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) \in S$$

   (2) 其集合 S 不是一个子空间，因为 $(100, 1, 0) \in S$ 但是 $2(100, 1, 0) = (200, 2, 0) \notin S$.
   (3) 其集合 S 不是一个子空间，因为 $(1, 0, 0), (0, 1, 1) \in S$ 但是 $(1, 0, 0) + (0, 1, 1) = (1, 1, 1) \notin S$.
   (4) 其集合 S 是一个子空间。
   (5) 其集合 S 不是一个子空间，因为 $(1, 2, 3) \in S$ 但是 $(-1)(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \notin S$。

   □

2. 描述包含下列矩阵的最小子空间:

   (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   解答.

   - 包含矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小子空间就是由其所有线性组合形成的，即:

   $$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   也可以写成:$\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

- $\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$
- $\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- $\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$(也可以写成 $\begin{bmatrix} c+d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ 的形式，但要注意到 c, d 可以是任意的，所以可以直接各用一个任意值来表示 $c+d$ 和 d)

$\square$

Remark 0.1

第三问的另一个理解是注意到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以其也可以理解成由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 生成的空间。

3. 矩阵 A 的列空间的定义：

Definition 0.2

令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则矩阵 A 的列空间定义为：$C(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$。

即矩阵 A 的列空间是由其所有列向量生成的一个在 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。回顾我们在矩阵乘法中提到：

AB 中的每一列都是 A 的列的线性组合。

这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。

解答. 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有：

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $C(AB) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = Z$，而 $C(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$，所以 $C(AB) \subset C(A)$。 $\square$

4. 找出下列列向量中，线性无关的向量的最大个数：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解答. 注意到：

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_4, \\ -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_5, \\ -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_6 \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的线性组合可以表示出 $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$，另一方面:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

从而我们有，其线性无关的向量的最大个数为 3。 □

Remark 0.3

其实 Steinitz 换基定理告诉我们，任何一组向量其最大的线性无关的向量的个数都是相同的，所以我们可以随便以某些向量为基础，看其能扩充至多少个线性无关的向量，而这得到的答案就是最大的线性无关的向量的个数。

5. 请找出下列 $\mathbb{R}^4$ 的子空间的一组基:

(1) 由所有满足 $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ 的向量 (b_1, b_2, b_3, b_4) 组成的集合。
(2) 由所有满足 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3, b_4) 组成的集合。
(3) 由所有 $(1, 1, 0, 0)$ 和 $(1, 0, 1, 1)$ 的线性组合组成的向量集合

解答.

- 其一组基为 $\{(1, 1, 1, 1)\}$.
- 其一组基为 $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$.
- 其一组基为 $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$

□

Remark 0.4

正如之前所说，基不是唯一的，所以在相应空间里不停的寻找到一组能找到的最大的线性无关的向量组即可。

6. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种。现在考察在 $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}^3)$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个 "向量"，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题:

(1) 证明除单位矩阵 I 外的 5 个置换矩阵是线性无关的。
(2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 I。

解答. 首先我们列举出所有的 3×3 的置换矩阵:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 令 $c_1, \dots c_5$ 满足：

$$c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4 + c_5P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  记左边的矩阵为 M, 则有：

  - $M(1,1) = 0$ 蕴含 $c_5 = 0$.
  - $M(2,3) = 0$ 和 $c_5 = 0$ 蕴含 $c_3 = 0$.
  - $M(1,2) = 0$ 和 $c_5 = 0$ 蕴含 $c_1 = 0$.
  - $M(2,1) = 0$ 和 $c_1 = 0$ 蕴含 $c_4 = 0$.
  - $M(1,3) = 0$ 和 $c_4 = 0$ 蕴含 $c_2 = 0$.

  从而 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$，即：$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ 线性无关。

- 注意到：

$$P_1 + P_2 + P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I + P_3 + P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  所以我们有

$$I = P_1 + P_2 + P_5 - P_3 - P_4$$

□

Remark 0.5

第二问其实计算方法是任意的，我们这里列举了一个比较简单的方法。