线性代数 For EI | Lecture 5

第五次作业

Lecturer: 杨启哲 | Last modified: 2024 年 3 月 25 日

截止日期 2023 年 4 月 1 日

1. 描述包含下列矩阵的最小子空间：

   (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. 我们在矩阵乘法中提到：

   AB 中的每一列都是 A 的列的线性组合。

   这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。·

3. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 A 中列空间和行空间的一组基：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. 请找出下列 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间的一组基：

   (1) 所有对角矩阵。

   (2) 所有对称矩阵 (symmetric matrix, $A^T = A$)。

   (3) 所有反对称矩阵 (skew-symmetric matrix, $A^T = -A$)。

5. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种。现在考察在 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个“向量”，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题：

   (1) 证明除单位矩阵 I 外的 5 个置换矩阵是线性无关的。

   (2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 I。

6. 令 A 是 5×5 的可逆矩阵，其行空间和列空间分别是什么？