第五次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 7 日

1. 描述包含下列矩阵的最小子空间：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

解答.

- 包含矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的最小子空间就是由其所有线性组合形成的，即：

$$a\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

也可以写成:$\{\begin{bmatrix}a & b\\0 & b\end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

- $\{\begin{bmatrix}a & 0\\a & a\end{bmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\}$
- $\{\begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$
- $\{\begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$(也可以写成 $\begin{bmatrix}c+d & 0\\0 & d\end{bmatrix}$ 的形式，但要注意到 c,d 可以是任意的，所以可以直接各用一个任意值来表示 $c+d$ 和 d)

□

Remark 0.1

第三问的另一个理解是注意到

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

所以其也可以理解成由 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 生成的空间。

2. 我们在矩阵乘法中提到：

$$AB \text{ 中的每一列都是 } A \text{ 的列的线性组合。}$$

这说明 $C(AB) \subseteq C(A)$，请给出一个例子说明这个包含关系是严格的，即存在 A, B 使得 AB 和 A 的列空间不相等。

解答. 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有：

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $C(AB) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = Z$，而 $C(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$，所以 $C(AB) \subset C(A)$。 □

.

3. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 A 中列空间和行空间的一组基：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解答. 令 $A = BC$，则：

- A 的每一列都是 B 的列的线性组合，所以 A 的列空间是 B 的列空间的子空间。
- A 的每一行都是 C 的行的线性组合，所以 A 的行空间是 C 的行空间的子空间。

从而观察可得：

(1) A 的列空间的一组基是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

(2) A 的行空间的一组基是 $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

□

Remark 0.2

但需要注意，这并不意味着 A 的列空间是和 B 的列空间相等 (或者：A 的行空间和 C 行列空间相等)，只是在这个特殊的例子里，恰好两个矩阵都是满秩的。

4. 请找出下列 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}^3)$ 的子空间的一组基：

(1) 所有对角矩阵。
(2) 所有对称矩阵 (symmetric matrix, $A^T = A$)。
(3) 所有反对称矩阵 (skew-symmetric matrix, $A^T = -A$)。

解答.

- 对角矩阵是只有对角线 (主) 上有非零元素的矩阵，其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

.

- 对称矩阵是 $A^T = A$ 的矩阵，即要满足 $A(i,j) = A(j,i)$，从而其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

.

- 反对称矩阵是 $A^T = -A$ 的矩阵，即要满足 $A(i,j) = -A(j,i)$，从而其一组基为

$$\left\{\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\right\}$$

.

□

5. 我们知道 3×3 的置换矩阵一共有 6 种。现在考察在 $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}^3)$ 上的向量空间，在这个空间里一个 3×3 的矩阵被视作一个“向量”，加法和数乘的定义就是矩阵的加法和数乘。考虑下列问题：

(1) 证明除单位矩阵 I 外的 5 个置换矩阵是线性无关的。

(2) 利用这 5 个矩阵的一个线性组合来表示单位矩阵 I。

解答. 首先我们列举出所有的 3×3 的置换矩阵：

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ P_4\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ P_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

- 令 $c_1,\dots c_5$ 满足：

$$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3+c_4P_4+c_5P_5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

记左边的矩阵为 M, 则有：

  ◦ $M(1,1)=0$ 蕴含 $c_5=0$.
  ◦ $M(2,3)=0$ 和 $c_5=0$ 蕴含 $c_3=0$.
  ◦ $M(1,2)=0$ 和 $c_5=0$ 蕴含 $c_1=0$.
  ◦ $M(2,1)=0$ 和 $c_1=0$ 蕴含 $c_4=0$.
  ◦ $M(1,3)=0$ 和 $c_4=0$ 蕴含 $c_2=0$.

从而 $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$，即：P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 线性无关。

- 注意到：

$$P_1 + P_2 + P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I + P_3 + P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以我们有

$$I = P_1 + P_2 + P_5 - P_3 - P_4$$

□

Remark 0.3

第二问其实计算方法是任意的，我们这里列举了一个比较简单的方法。

6. 令 A 是 5×5 的可逆矩阵，其行空间和列空间分别是什么？

解答. A 是可逆矩阵，所以存在矩阵 B 使得 $AB = BA = I$.

- $AB = I$ 意味着其列秩 $column{-}rank(A) = 5$，即：A 的列空间是 $\mathbb{R}^5$.
- $BA = I$ 意味着其行秩 $row{-}rank(A) = 5$，即：A 的行空间是 $\mathbb{R}^5$.

□