第六次作业

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 1 日

截止日期　2023 年 4 月 8 日

1. 描述下列矩阵的列空间：

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

2. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 A 中列空间和行空间的一组基：
   - $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}$
   - $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}$

3. 判断下列语句的真假：
   - 令 A 是 $m\times n$ 的矩阵，则不在 $C(A)$ 的向量 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 组成的集合也是一个向量空间。
   - 如果 $C(A)=\{\mathbf{0}\}$，则 A 是全零矩阵。
   - $2A$ 的列空间和 A 的列空间相同。
   - A 的列空间和 $A-I$ 的列空间相同。

4. 证明矩阵 $C=\begin{bmatrix}A & AB\end{bmatrix}$ 的列空间与矩阵 A 的列空间相等，这里 A 是 $m\times n$ 的矩阵，B 是 $n\times k$ 的矩阵，所以 C 是一个 $m\times(n+k)$ 的矩阵。

5. 作为一个预热，我们以一个例子观察一下矩阵的行空间和零空间之间的关系。考察如下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&3&1\\0&2&0&0&1\\0&0&0&2&0\end{bmatrix}$$

   其零空间就是所有 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解组成的空间，记为 $N(A)$。显然 $N(A)$ 也是 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间。
   - 请描述矩阵 A 的行空间和零空间，并分别给出其一组基和其对应的维数。
   - 证明，对任意的 $\mathbf{u}\in N(A),\mathbf{v}\in C(A^T)$ 都有 $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

6. 令 V 是一个向量空间，S 是 V 的一个子空间，T 是 V 的另一个子空间，我们定义如下的运算：

$$S+T=\{\mathbf{v}+\mathbf{w}\mid \mathbf{v}\in S,\mathbf{w}\in T\}$$

   - 假设 $V=\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$，$S=\{\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}\}$，$T=\{\begin{bmatrix}0&b\\0&0\end{bmatrix}\}$，描述一下 $S+T$。
   - 证明 $S+T$ 是一个 V 的子空间。
   - 给定两个都是 m 行的矩阵 A,B，其列空间分别记为 S,T，显然 S,T 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，请尝试构造一个子空间为 $S+T$ 的矩阵, 并描述矩阵的大小。