第六次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2024 年 4 月 10 日

1. 描述下列矩阵的列空间：

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

解答.

(1) $C(A)=span(\{\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\})=\{c\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\mid c,d\in\mathbb{R}\}$。

(2) $C(B)=span(\{\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\})=span(\{\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}\})$。

(3) $C(C)=span(\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\})$。

□

Remark 0.1

这道题希望帮助大家认识到列空间的定义，即列空间是所有列的线性组合的集合，所以我们可以通过列向量的线性组合来描述列空间，也就是 $span(\{\})$ 的意思。

2. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 A 中列空间和行空间的一组基：

- $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}$
- $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}$

解答.

- A 的列空间的一组基是 $\{\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}\}$，行空间的一组基是 $\{\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\}$。
- A 的列空间的一组基是 $\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\}$，$A$ 的行空间的一组基是 $\{\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}(=\begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix})\}$

□

Remark 0.2

这道题希望大家再次认识到对于矩阵乘法 AB 来说，其行是 B 的行的线性组合，列是 A 的列的线性组合，所以我们可以根据 A 的列和 B 的行来找出 AB 的列空间和行空间的一组基。

3. 判断下列语句的真假：

- 令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则不在 $C(A)$ 的向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 组成的集合也是一个向量空间。
- 如果 $C(A) = \{\mathbf{0}\}$，则 A 是全零矩阵。
- $2A$ 的列空间和 A 的列空间相同。
- A 的列空间和 $A - I$ 的列空间相同。

解答.

- 命题是不正确的，考察如下的矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
其列空间是 $\{c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R}\}$，显然我们有 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C(A)$ 但 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in C(A)$，即不在 $C(A)$ 的向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 上的加法是不封闭的，所以不构成一个向量空间。
- 命题是正确的，因为 $C(A)$ 是所有列的线性组合，所以如果 $C(A) = \{\mathbf{0}\}$，那么 A 的所有列都是零向量，即 A 是全零矩阵。
- 命题是正确的，令 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$，则 $2A$ 的列向量为 $2\mathbf{a}_1, \ldots, 2\mathbf{a}_n$，显然有：
$$span(\{2\mathbf{a}_1, \ldots, 2\mathbf{a}_n\}) = span(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\})$$
即：$2A$ 的列空间和 A 的列空间相同。
- 命题是不正确的，考虑 $A = I$ 的情况即可。

□

4. 证明矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ 的列空间与矩阵 A 的列空间相等，这里 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times k$ 的矩阵，所以 C 是一个 $m \times (n+k)$ 的矩阵。

解答. 令 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$，令 AB 的列向量为 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$，则 C 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$，并且对于任意的 $\mathbf{b}_i$，都存在 $c_{1i}, \cdots, c_{ni}$，使得 $\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^n c_{ji}\mathbf{a}_j$，从而：

$$\begin{aligned}
C(C) &= span(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}) \\
&= span(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \sum_{j=1}^n c_{j1}\mathbf{a}_j, \ldots, \sum_{j=1}^n c_{jk}\mathbf{a}_j\}) \\
&= span(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}) \\
&= C(A)
\end{aligned}$$

□

5. 作为一个预热，我们以一个例子观察一下矩阵的行空间和零空间之间的关系。考察如下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

其零空间就是所有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解组成的空间，记为 $N(A)$。显然 $N(A)$ 也是 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间。

- 请描述矩阵 A 的行空间和零空间，并分别给出其一组基和其对应的维数。
- 证明，对任意的 $\mathbf{u} \in N(A), \mathbf{v} \in C(A^T)$ 都有 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

解答.

- $$C(A^T) = span(\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\}),\ dim(C(A^T)) = 3$$

  $$N(A) = span(\{\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}),\ dim(N(A)) = 2$$

- 令 $\mathbf{u} \in N(A), \mathbf{v} \in C(A^T)$，则 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 可以写成如下的形式：

  $$\mathbf{u} = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  $$\mathbf{v} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  从而有 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$，即 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$。

□

Remark 0.3

我们可以将其转换成行最简形后观察到 $N(A)$ 的基：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

分别令其不是首元的变量即 $x_3 = 1$ 和 $x_5 = 1$ 便可得到 $N(A)$ 的一组基。

6. 令 V 是一个向量空间，S 是 V 的一个子空间，T 是 V 的另一个子空间，我们定义如下的运算：

$$S + T = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in S, \mathbf{w} \in T\}$$

- 假设 $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$，$S = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\}$，$T = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$，描述一下 $S + T$。
- 证明 $S + T$ 是一个 V 的子空间。
- 给定两个都是 m 行的矩阵 A, B，其列空间分别记为 S, T，显然 S, T 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，请尝试构造一个子空间为 $S + T$ 的矩阵, 并描述矩阵的大小。

解答.

- $S + T = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- 我们来验证 $S+T$ 是一个子空间。对任意的 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S+T$，由定义存在 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$，$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T$ 使得：

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2$$

从而：

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1) + (\mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2) = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) \in S + T$$
$$c\mathbf{u}_1 = c(\mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1) = c\mathbf{s}_1 + c\mathbf{t}_1 \in S + T$$

即 $S + T$ 是 V 的子空间。

- 该矩阵可以定义为：

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

其大小为 $m \times (n_A + n_B)$。

□