第六次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 4 月 1 日

截止日期 2023 年 4 月 8 日

1. 写出使得下列矩阵 A 消元成上三角矩阵的消元矩阵 $E21, E_{32}$，并写出其 LU 分解。
(回顾 $A = E_{32}E_{21}U$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 判断下列两个矩阵是否是可逆矩阵，如果是的话请给出其逆矩阵。

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. 将下列矩阵转换成行阶梯形矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

4. 作为一个预热，我们以一个例子观察一下矩阵的行空间和零空间之间的关系。考察如下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

其零空间就是所有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解组成的空间，记为 $N(A)$。显然 $N(A)$ 也是 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间。

- 请描述矩阵 A 的行空间和零空间，并分别给出其一组基和其对应的维数。
- 证明，对任意的 $\mathbf{u} \in N(A), \mathbf{v} \in C(A^T)$ 都有 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

5. 令 V 是一个向量空间，S 是 V 的一个子空间，T 是 V 的另一个子空间，我们定义如下的运算:

$$S + T = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in S, \mathbf{w} \in T\}$$

- 假设 $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$，$S = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\}$，$T = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$，描述一下 $S + T$。
- 证明 $S + T$ 是一个 V 的子空间。
- 给定两个都是 m 行的矩阵 A, B，其列空间分别记为 S, T，显然 S, T 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，请尝试构造一个子空间为 $S + T$ 的矩阵, 并描述矩阵的大小。

6. 最后我们对矩阵的 LU 分解再作一些讨论。令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们已经知道如果 A 是一个可逆矩阵，并且消元法中不需要交换行，那么我们可以获得一个 LU 分解 $A = LU$。我们现在对这个性质进一步阐述。记矩阵左上的 $k \times k$ 的元素组成的矩阵为 A_k，比如在下列矩阵中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$，$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$。证明：如果对于所有的 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 都有矩阵 A_k 是可逆的，那么 A 具有 LU 分解，即 $A = LU$.

hint: 进行消元法，并尝试说明对每个 k，我们都有 $LU = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$，即可以找到 A_k 的分解。