第六次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2024 年 4 月 10 日

1. 写出使得下列矩阵 A 消元成上三角矩阵的消元矩阵 $E21, E_{32}$，并写出其 LU 分解。(回顾 $A = E_{32}E_{21}U$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

解答. 其消元过程如下：

(1) $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，即将第一行的 -2 倍加到第二行。此时矩阵变为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，即将第二行的 -2 倍加到第三行。此时矩阵变为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

从而其 LU 分解为：

$$A = E_{32}(2)E_{21}(2)U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

□

2. 判断下列两个矩阵是否是可逆矩阵，如果是的话请给出其逆矩阵。

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解答.

- 对于矩阵 C，通过消元可得：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 1.5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  其没有 4 个首元，所以其不是可逆的。
- 对于矩阵 F，通过消元可得：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  其有 4 个首元，所以其是可逆的。我们进一步把其变成行最简形：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  从而其逆矩阵为：

$$F^{-1} = E_{12}(1)E_{23}(1)E_{34}(1)E_{43}(1)E_{32}(1)E_{21}(1) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Remark 0.1

我们也完全可以直接对下列矩阵进行 *Gauss–Jordan* 消元：

$$\begin{bmatrix} F & I \end{bmatrix}$$

从而最终 I 变成的矩阵便是其逆矩阵。

3. 将下列矩阵转换成行阶梯形矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

解答.

- 对于矩阵 A，通过消元可得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 对于矩阵 B，通过消元可得：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

4. 作为一个预热，我们以一个例子观察一下矩阵的行空间和零空间之间的关系。考察如下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

其零空间就是所有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解组成的空间，记为 $N(A)$。显然 $N(A)$ 也是 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间。

- 请描述矩阵 A 的行空间和零空间，并分别给出其一组基和其对应的维数。
- 证明，对任意的 $\mathbf{u} \in N(A), \mathbf{v} \in C(A^T)$ 都有 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

解答.

-

$$C(A^T) = span(\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\}),\ dim(C(A^T)) = 3$$

$$N(A) = span(\{\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}),\ dim(N(A)) = 2$$

- 令 $\mathbf{u} \in N(A), \mathbf{v} \in C(A^T)$，则 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 可以写成如下的形式：

$$\mathbf{u} = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  从而有 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$，即 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$。

□

Remark 0.2

我们可以将其转换成行最简形后观察到 $N(A)$ 的基:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

分别令其不是首元的变量即 $x_3 = 1$ 和 $x_5 = 1$ 便可得到 $N(A)$ 的一组基。

5. 令 V 是一个向量空间，S 是 V 的一个子空间，T 是 V 的另一个子空间，我们定义如下的运算:

$$S + T = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in S, \mathbf{w} \in T\}$$

- 假设 $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$，$S = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\}$，$T = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$，描述一下 $S + T$。
- 证明 $S + T$ 是一个 V 的子空间。
- 给定两个都是 m 行的矩阵 A, B，其列空间分别记为 S, T，显然 S, T 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，请尝试构造一个子空间为 $S + T$ 的矩阵, 并描述矩阵的大小。

解答.

- $S + T = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- 我们来验证 $S+T$ 是一个子空间。对任意的 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S+T$，由定义存在 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$，$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T$ 使得:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2 \end{aligned}$$

  从而:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1) + (\mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2) &= (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) \in S + T \\ c\mathbf{u}_1 = c(\mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1) &= c\mathbf{s}_1 + c\mathbf{t}_1 \in S + T \end{aligned}$$

  即 $S + T$ 是 V 的子空间。
- 该矩阵可以定义为:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

  其大小为 $m \times (n_A + n_B)$。

□

6. 最后我们对矩阵的 LU 分解再作一些讨论。令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们已经知道如果 A 是一个可逆矩阵，并且消元法中不需要交换行，那么我们可以获得一个 LU 分解 $A = LU$。我们现在对这个性质进一步阐述。记矩阵左上的 $k \times k$ 的元素组成的矩阵为 A_k，比如在下列矩阵中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有 $A_1=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1&1\\2&4\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&4&5\\0&4&0\end{bmatrix}$。证明：如果对于所有的 $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ 都有矩阵 A_k 是可逆的，那么 A 具有 LU 分解，即 $A=LU$.

hint: 进行消元法，并尝试说明对每个 k，我们都有 $LU=\begin{bmatrix}L_k&0\\ *&*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_k&*\\0&*\end{bmatrix}$，即可以找到 A_k 的分解。

解答. 注意到 A_k 是可逆的，从而 A_k 存在 k 个首元，这意味着对矩阵 A 进行消元时，如果在第 k 步结束时并没有进行行交换的操作，则矩阵 A' 变成了如下的形式：

$$A'=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2k}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{kk}&\cdots&a_{kn}\\0&0&\cdots&0&\cdots&a_{(k+1)n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_k&B\\O&C\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$A'=E\cdots EA=LA$$

注意到：$(E\cdots E)^{-1}$ 是一个下三角矩阵，即可以写成：

$$(E\cdots E)^{-1}=\begin{bmatrix}L_k&O\\D&L_{n-k}\end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$A=\begin{bmatrix}A_k&*\\ *&*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_k&O\\D&L_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_k&B\\O&C\end{bmatrix}$$

即：$A_k=L_kU_k+AO=L_kU_k$。从而我们证明了如果在整个消元过程中没有行变换，则 A 最终将有 LU 的分解形式。

下面我们利用归纳法对 k 归纳证明整个消元过程中都没有行交换的操作。

基本步骤: $k=1$ 时由于 A_1 是可逆的，从而 $a_{11}\neq 0$。即第一步消元时不需要行交换。

归纳步骤： 假设对于 $<k$ 时消元过程中不需要行交换，则在第 $k-1$ 步后矩阵变成了如下的形式：

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1(k-1)}&a_{1k}&\cdots&a_{1n}\\0&a'_{22}&\cdots&a'_{2(k-1)}&a'_{2k}&\cdots&a'_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a'_{(k-1)(k-1)}&a'_{(k-1)k}&\cdots&a'_{(k-1)n}\\0&0&\cdots&0&a'_{kk}&\cdots&a'_{kn}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&a'_{nk}&\cdots&a'_{nn}\end{bmatrix}$$

令此时左上的 $k\times k$ 的矩阵为 A'_k，注意到 A'_k 是由 A_k 通过初等行变换得到的，从而：

$$rank(A'_k)=rank(A_k)=k$$

从而 A'_k 有 k 个首元，即 $a'_{kk}\neq 0$，即第 k 步消元时不需要行交换。

□

Remark 0.3

正如提示所说，我们实际上对每个 A_k，都找到了一个 LU 分解，即 $A_k = L_k U_k$。